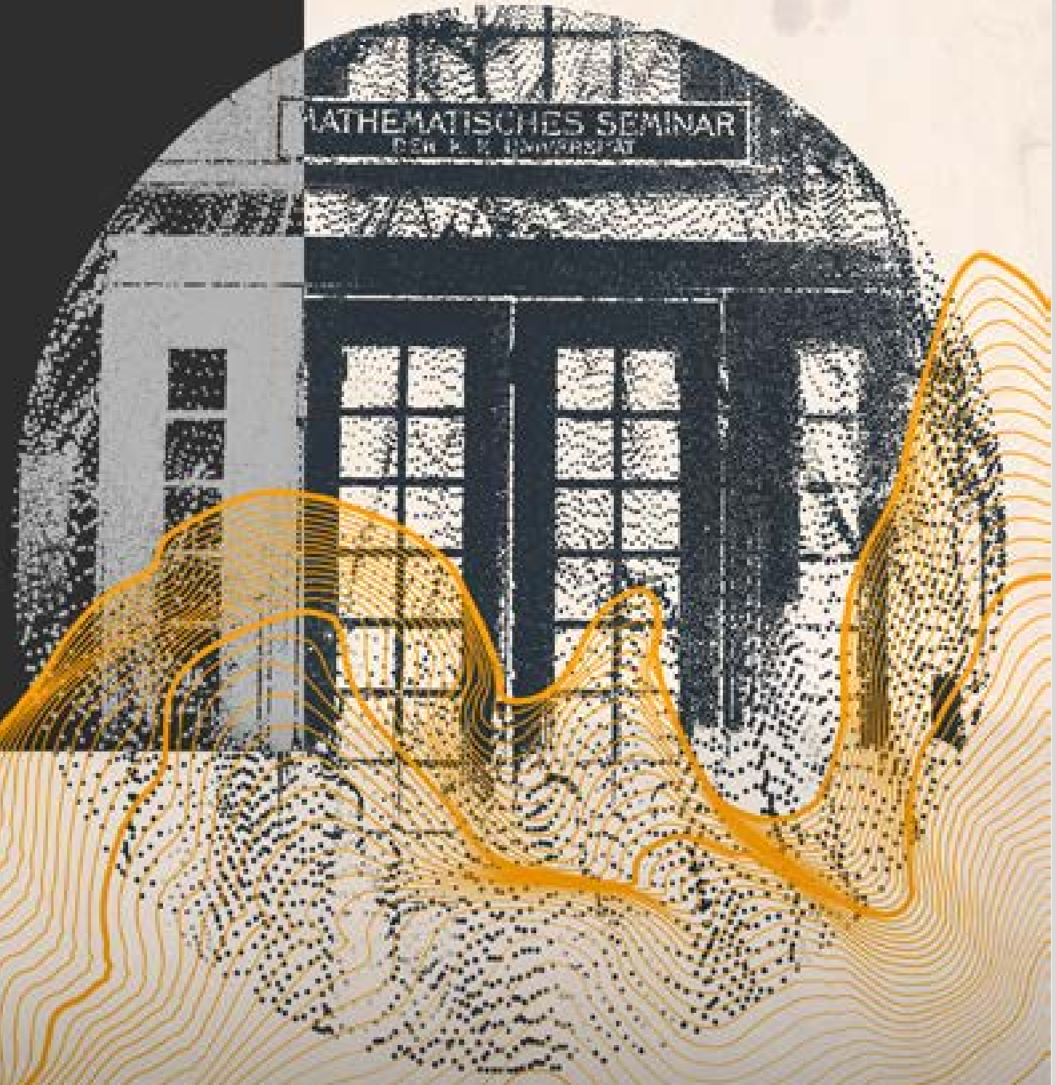
WITTGENSTEIN E O

Círculo de Viena



Edição bilíngue alemão/português

Apresentação, tradução e notas

João José R. L. de Almeida

EDITORA hörle

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Wittgenstein, Ludwig, 1889-1951
Wittgenstein e o círculo de Viena [livro eletrônico] / Ludwig Wittgenstein ; apresentação, tradução e notas João José R. L. de Almeida. -- 1. ed. -- Curitiba, PR : Horle Books, 2022.
PDF.

Título original: Wittgenstein und der Wiener Kreis
Bibliografia.
ISBN 978-65-996742-7-3

1. Filosofia 2. Ludwig, Wittgenstein, 1889-1951
3. Positivismo lógico I. Título.

22-102814 CDD-146.4

Índices para catálogo sistemático:

1. Positivismo : Filosofia 146.4

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

https://doi.org/10.55872/RSEF9060

Abreviaturas de Obras de Wittgenstein:*

IF	Philosophical Investigations (Wittgenstein, 2009)
LE	A Lecture on Ethics (Wittgenstein, 1993)
MS	Manuscritos do Nachlass (Wittgenstein, 2000)
ORD	Observações Sobre “O Ramo Dourado” De Frazer (Wittgenstein, 2011)
PG	Philosophical Grammar (Wittgenstein, 2005)
PR	Philosophical Remarks (Wittgenstein, 1975)
TLP	Tractatus Logico-Philosophicus (Wittgenstein, 2001)
TS	Datiloscritos do Nachlass (Wittgenstein, 2000)
VW	The Voices of Wittgenstein. The Vienna Circle (Wittgenstein, 2003)
WWK	Wittgenstein und der Wiener Kreis (Wittgenstein, 1984)

* As abreviaturas das obras de Wittgenstein seguem as letras iniciais dos títulos dos livros publicados tal como constam na bibliografia. Os textos não publicados na forma de livro que fazem parte do espólio literário (*Nachlass*) aparecem abreviados aqui pelos nomes como são tradicionalmente conhecidos: BM para *Bemerkungen*; MS para *Manuscripts*; TS para *Typescripts*. O espólio literário foi publicado numa coleção de seis CDs (Wittgenstein, 2000) pela Oxford University Press e pelos Wittgenstein Archives da Universidade de Bergen, conhecida como a Bergen Electronic Edition (BEE). Atualmente toda a coleção foi transferida para o Wittgenstein Source, da Universidade de Bergen: www.wittgensteinsource.org/

ÍNDICE

AS DISCUSSÕES DE WITTGENSTEIN COM SCHLICK E WAISMANN

O conjunto de textos formado pelas sete partes e dois anexos deste livro foi organizado em 1979 por Brian McGuinness a partir de notas taquigráfricas, tomadas por Friedrich Waismann, de uma série de encontros mantidos com Wittgenstein em Viena entre os anos de 1929 e 1932.[1] A maioria desses encontros ocorreu na casa de Moritz Schlick, outras vezes também numa casa de retiro da família de Wittgenstein nos arredores de Viena, mas todas com local e data muito bem assinalados. Totalizaram-se uma série de 17 debates em torno de temas aparentemente propostos por Wittgenstein, em que quase só aparece a sua voz, geralmente em tom professoral. As preciosas intervenções de Waismann e Schlick nesses debates são muito poucas, e fica parecendo, na reprodução feita por Waismann, que se tratava de um diálogo em estilo socrático, em que a voz do mestre, sempre impondo a correção ao pensamento divergente, naturalmente se sobrepunha às réplicas eventuais dos discípulos.[2]

Nada disso deve nos iludir, no entanto, e levar-nos a acreditar que a vertiginosa modificação do pensamento de Wittgenstein, ocorrida entre 1929 e 1931, deu-se de maneira unilateral. Na realidade, ela sempre esteve igualmente acompanhada por uma participação proativa, como também de uma modificação colateral, do pensamento daqueles dois próceres do famoso Círculo de Viena. O valoroso estudo de Juha Manninen (2011) deixa bastante clara a existência de uma intensa atividade comunicativa entre Wittgenstein, Schlick e Waismann, continuada pelos anos que se seguiram, de modo a tornar possível a ideia de que na realidade formou-se um diálogo muito mais polifônico do que socrático circulando pelas artérias das suas conversações. Uma bela amostra da continuidade destes colóquios vê-se na publicação em 2003 das VW, editadas por Gordon Baker a partir de parte do material do espólio literário de Waismann que estava sem data e não foi aproveitado por McGuinness.

O grande interesse do texto aqui publicado, por tudo isso, enraiza-se principalmente na possibilidade de especular sobre estes movimentos de pensamento nos primeiros anos do retorno oficial de Wittgenstein à filosofia. Essas anotações imediatamente se convertem em ponto de comparação com os manuscritos, datiloscritos, aulas transcritas e correspondências produzidas por Wittgenstein neste profícuo período da sua atuação filosófica.

Atividade que havia sido temporariamente interrompida pela finalização da escrita do TLP, que incita ao abandono da filosofia. O TLP, junto com *Wörterbuch für Volksschulen*,[3] foram os únicos livros que vieram a lume durante toda a vida do nosso filósofo. O primeiro foi publicado em 1922, em inglês e alemão, pela Kegan Paul, e numa versão exclusivamente em alemão no periódico *Annalen der Naturphilosophie*. Finalizado o escrito em 1918, Wittgenstein deparou-se com enormes dificuldades para conseguir uma editora disposta a publicar o trabalho. Contudo, a facilidade com que o texto repercutiu nos círculos acadêmicos da filosofia analítica depois da publicação é um eloquente testemunho do enorme equívoco dos editores de então.[4] Frank Ramsey, tradutor auxiliar de Charles Ogden deste livro para o inglês, era um grande entusiasta do pensamento de Wittgenstein, e, por seu intermédio, as informações ali veiculadas chegaram rapidamente à terra natal do autor. Já em 1922, Hans Hahn proferiu um seminário sobre o TLP e deixou Schlick vivamente impressionado com a obra.

Schlick, tão logo soube que o filósofo se encontrava agora na Áustria, não demorou em procurá-lo. O primeiro contato entre Wittgenstein e Schlick deu-se em dezembro de 1924, numa carta enviada por este a Wittgenstein, em que o fundador do Círculo de Viena lhe solicita um encontro. Nessa ocasião, Schlick supunha que Wittgenstein estivesse em Puchberg, onde atuava como professor do ensino elementar, mas ele já estava, na realidade, em Otterthal para dar aula em outra escola rural (cf. McGuinness, p. 13).[5] Wittgenstein tomou conhecimento da carta de Schlick somente quando retornou para Puchberg, após o feriado de Natal. Entretanto o primeiro encontro entre os dois filósofos só se realizou efetivamente em 1927, depois que Wittgenstein havia desistido da sua carreira pedagógica e rural, e retornado definitivamente para Viena. E, mesmo assim, somente quando o compromisso de construir uma casa em Kundmanngasse para a sua irmã Gretl, em parceria com seu grande amigo Paul Engelmann, já estava com o projeto pronto e entrando na fase final de construção.

McGuinness informa que só depois de decorrido meses de muitas conversas, e de haver se acostumado também com Schlick, é que Wittgenstein concordou em encontrar-se com outros membros do Círculo (1984, p. 15). Mas durante 1927 e 1928 houve conversas formais e informais sem que nenhuma nota sobre o conteúdo fosse tomada.

O ano de 1929 marca o retorno oficial de Wittgenstein às atividades filosóficas. O autor do TLP decide permanecer em Cambridge como "advanced student" e defender um doutorado sob a supervisão de Ramsey. O jovem matemático e filósofo, dezessete anos mais jovem que Wittgenstein, já havia se tornado, na realidade, um parceiro de discussões do autor do TLP (Monk, 1990, pp. 258-259). Ramsey já havia visitado Wittgenstein por duas vezes em sua terra natal na primeira metade dos anos de 1920, mas em 1929, agora de volta a Cambridge, as discussões filosóficas entre os dois amigos se intensificaram consideravelmente, e, como resultado, Wittgenstein escreveu em profusão. Foram compostos os MSS 105, 106, 107 e 108, que levaram os nomes de *Philosophische Bermerkungen*[6] (*Observações Filosóficas*) e constituíram a base para os TSS 208 e 209.[7] Os vários tópicos de discussão que se apresentam nas discussões de 1930 com Schlick e Waismann têm contrapartes nesses dois datiloscritos, principalmente.

No natal de 1929, Wittgenstein reuniu-se com Waismann e Schlick, na casa deste em 18 de dezembro. Seguiram-se então mais cinco encontros até o fim de janeiro de 1930, todos no mesmo local. Em total, os seis encontros conformam a Parte I deste livro. A ideia fundamental que Wittgenstein apresenta, e pela qual os participantes percorrem temas tão varia-

1. Traduzo este material compilado e editado por McGuinness diretamente da edição alemã publicada pela Suhrkamp, no terceiro volume das *Ludwig Wittgenstein Werkausgabe in 8 Bänden*.

2. Pelo menos é assim que McGuinness caracteriza as reuniões a partir de 1929: "A atmosfera era muito mais parecida a uma reunião de negócios, e mais formal do que antes" (1984, p. 19).

3. O dicionário para estudantes do ensino elementar foi publicado em 1925 pela Editora Hölder-Pichler-Tempsky (cf. Monk, 1990, p. 226)

4. Toda a dramática vicissitude da publicação do livro está narrada em muitos detalhes em Monk (1990, pp. 173-184; 203-207).

5. Foi em Otterthal que Wittgenstein produziu o mencionado dicionário para alunos da escola primária.

6. Há uma exceção, já que o MS 107 (Volume III) leva o nome de *Philosophische Betrachtungen* (*Considerações Filosóficas*).

7. Trechos selecionados destes dois datiloscritos compõem a atual PR.

dos quanto a busca por respostas em matemática, ou o velho tema da trissecção do ângulo com régua e compasso, é a de que nossas perguntas cognitivas já estão embutidas dentro de um sistema que lhes dá previamente todo o sentido. Desse modo, a ideia tractariana de proposições elementares e de objetos agora se altera, pois essas noções deixam de ser elementos lógicos independentes na concepção filosófica do autor, elementos que operam como ancoragem de uma análise lógica que vai revelar o real sentido da proposição, mas que passam a funcionar, a partir de então, com relação ao sistema de regras sintáticas dentro do qual uma análise lógica é possível, isto é, passam a ser dependentes do sistema relativo ao caso em que a proposiçao se aplica, ou, em outras palavras, prendem-se ao próprio sistema lógico que orienta a verificação daquele caso.

A Parte II reproduz o encontro ocorrido na casa de Schlick por ocasião dos feriados da Páscoa de 1930. O mais interessante dos temas ali discutidos, probabilidade e indução, é que Wittgenstein, embora ainda insista em uma visão estritamente lógica da realidade, isto é, a uma visão em que o privilégio epistêmico dos casos vai para o lógico e não para o pragmático, a uma visão em que o pragmático ainda é concebido pela jaqueta apertada das regras da lógica proposicional bivalente, consegue mesmo assim entrever que inferências generalizantes funcionam como predições nos casos em que se aplicam, e não propriamente como certezas ou como verdades. Por conseguinte, valores de verdade não são independentes das demonstrações, - o que nos leva diretamente à conclusão de que só proposições individuais são verificáveis. Evidentemente, o mesmo não vale para generalizações. Equações da física, por exemplo, não podem ser verdadeiras nem falsas, como se discutiu naquela ocasião.

Na Parte III, descrevem-se dois encontros. O primeiro nas férias de verão na casa de Schlick, para preparar uma apresentação das novas concepções de Wittgenstein sobre a matemática, que ficaria sob o encargo de Waismann. Essa apresentação teria lugar em Königsberg, entre 5 e 7 de setembro de 1930, durante a "Segunda Conferência Sobre Teoria do Conhecimento nas Ciências Exatas". Ali seriam proferidas quatro ponências sobre fundamentos da matemática: além de Waismann, que falaria sobre o ponto de vista de Wittgenstein, Carnap se encarregaria da concepção logicista, Heyting, da concepção intuicionista, e von Neumann, da concepção formalista. A apresentação foi feita, mas o manuscrito de Waismann, à diferença das outras três apresentações, nunca chegou ao editor de *Erkenntnis*. O número 2 de 1931 do periódico dedicado ao congresso deixou de publicar a visão de Wittgenstein. O Anexo A deste livro apresenta um extrato do que Waismann teria preparado para aquela ocasião, de acordo com papéis recuperados em Tel Aviv que estavam em poder de Shimshon Stein, um amigo de Paul Engelmann. Ainda há na Parte III a apresentação de uma série de temas esparsos encontrados entre os papéis de Waismann com a data de 25 de setembro de 1930. Wittgenstein ainda estava na Áustria para finalizar o seu trabalho, para onde retornou nas férias de verão, depois de defender o doutorado, mas não há indicação do local dessa reunião em particular.

A Parte IV contém, a meu ver, os mais estimulantes conteúdos das discussões que Wittgenstein manteve com Schlick e Waismann nos dois anos cobertos por este livro. Neste capítulo estão presentes não somente os temas da ética, da religião, da sociologia e da estética, tratados provavelmente como uma reação a um livro que havia sido publicado recentemente por Schlick, sob o título de *Questões de Ética*, mas também testemunhamos um importante debate sobre a proposta de prova metamatemática de consistência da aritmética, defendida por Hilbert. Todas essas reuniões se deram entre dezembro de 1930 e janeiro de 1931.

Quanto aos temas dos valores éticos, religiosos, sociológicos e estéticos, Wittgenstein sempre os considera como passíveis de descrições, mas não exatamente de explicações. Tais conteúdos discursivos não podem conformar o que normalmente se exige de uma teoria: o poder preditivo que circunscreve hipóteses ou generalizações. Não há teoria sobre o ético, o estético, o religioso, ou valores e ações em geral, porque não se submetem às regras da inferência indutiva. Esta requer uma coleção significativa de fatos. Mas no plano dos valores e das ações não há fatos, portanto não há proposições individuais que possam ser verdadeiras ou falsas, já que valores e ações são referidos imediatamente pela linguagem como generalizações. Por conseguinte, nesse âmbito da atividade humana pode-se apenas informar o que está acontecendo. A mesma coisa ocorre com as equações da física: como hipóteses, elas não podem ser verificadas (p. 186). Apenas as proposições particulares da hipótese é que podem ser, de fato, verificadas.

Sobre a proposta de Hilbert a respeito de uma prova de completude, consistência e decidibilidade da aritmética, Wittgenstein objeta que uma demonstração pode nos permitir ver coisas que não sabíamos a respeito do próprio sistema aritmético, mas a prova, por outro lado, não se consolida em proposições. Isto é, ela tampouco poderia ser verdadeira ou falsa. A prova só poderia ser parte de uma estratégia de persuasão e de reconhecimento das regras pelas quais se aplica aquele sistema. Na p. 136, Wittgenstein compara essas regras às regras do jogo de xadrez, e a demonstração da correção e da consistência daquelas regras à prosa, ao bate-papo, ou à propaganda, que são estratégias de persuasão, não de convencimento. Na medida em que um cálculo é um processo decisório, e ele tem que ser, por isso, necessariamente efetivo, não faz sentido averiguar previamente se ele seria realmente completo ou se não haveria nele alguma contradição oculta. Caso se chegue a uma contradição, pensa Wittgenstein, as regras podem ser ligeiramente modificadas para que o jogo tenha prosseguimento. Isto é, "uma contradição só é uma contradição *quando ela existe*" (p. 138). Como não há verdade independente do próprio cálculo, Wittgenstein conclui que a metamatemática de Hilbert é novamente um jogo, e não um *metajogo*. Portanto, o cálculo de Hilbert é tão bom quanto qualquer outro cálculo que se queira. Wittgenstein chega a dizer, antecipando acertadamente o futuro, que nos beneficiaríamos de nos emanciparmos da ideia de consistência (cf. p. 160). As proposições verdadeiras de um sistema são verdadeiras tão somente naquele sistema.

É prescindível dizer ao leitor bem informado acerca da importância dessas concepções wittgensteinianas para a discussão que se seguirá nos anos seguintes sobre os teoremas da incompletude de Gödel.[8] Assim como também é dispensável informá-lo da atual importância do fato de que já em 1930 Wittgenstein declarou "eu poderia muito bem estudar lógica com contradições" (p. 150).

Na Parte V, encontramos tópicos cuja discussão está no TS 211, o precursor do *Big Typescript* (TS 213). Este encontro ocorreu numa das casas da família de Wittgenstein em setembro de 1931. Nesta parte há uma objeção interessante de Waismann, porque ele confunde a as discussões de Wittgenstein sobre a natureza das contradições no cálculo com a afirmação de que no cálculo não há contradições. De posse dessa convicção, Waismann especula

8. Em 31 de julho de 1935, Wittgenstein comenta, numa carta a Schlick, a sua visão dos teoremas da incompletude de Gödel nos mesmos termos das discussões que mantinha com os membros do Círculo. Esta, aliás, é a sua última correspondência com o seu amigo, já este que morreu inesperadamente assassinado em 1936 por um estudante mentalmente perturbado pela atmosfera nazista e anti-semita reinante numa Áustria já prestes a ser anexada por Hitler. (cf. Nedo & Ranchetti, 1983, p. 260, e também Edmonds, 2020).

que a suposta ausência de contradições se confundiria com a natureza da prova indireta, ou da prova por redução ao absurdo, em que se assume deliberadamente uma proposição e o seu contrário com a finalidade de defender a verdade de uma das alternativas. Wittgenstein esclarece que pode, sim, haver contradições no cálculo, ao contrário da suposição de Waismann, mas que o que ele quer dizer na realidade é que "não adianta falar de uma *contradição oculta*" (p. 206). O tema da prova indireta e da contradição preenche quase a totalidade do conteúdo deste dia de discussões filosóficas.

Na Parte VI, em dezembro de 1931, Wittgenstein já está de posse de uma concepção de gramática fundada na linguagem ordinária. Nesse sentido, ele esclarece o que quer dizer quando afirma que não pode haver teses em filosofia, e também em que sentido se pode dizer que havia dogmatismo no TLP. Além disso, aparece uma série de tópicos interessantes a respeito do infinito em matemática, do conceito de identidade proposto por Ramsey, e novas discussões sobre prova de consistência e sobre contradições no cálculo.

Finalmente, na Parte VII, já estamos no verão de 1932 e os participantes mais uma vez se engajam no esclarecimento das diferenças entre a gramática da proposição e a das hipóteses, que, para Wittgenstein, são completamente diferentes.

Há mais dois anexos neste livro (A e B). O primero, como já disse, é um extrato do que Waismann deveria apresentar na conferência de Königsberg; o segundo são as "Teses" compiladas por Waismann e posteriormente consideradas dogmáticas por Wittgenstein (p. 216).

As notas de rodapé deste livro se dividem entre as observações do editor (N. E.), os comentários de Waismann (N. W.), além dos esparsos comentários deste tradutor (N. T.).

Não há dúvida, pelos motivos brevemente aqui expostos, de que este documento é imprescindível para o debate e o esclarecimento do pensamento de Wittgenstein, para a determinação mais clara dos movimentos do seu pensamento ao longo dos anos, e das diferenças e semelhanças com outros pensamentos filosóficos relevantes nesta discussão. Mas quero crer que sobretudo, para além das justificações históricas, este texto é importante para os debates acerca da própria natureza da matemática e da atividade filosófica em geral. Wittgenstein é um pensador *sui generis*, como já bem se sabe. Mas nem todos estamos muito de acordo sobre o sentido em particular desta singularidade. Espero que a publicação em português deste livro sirva como contributo para alimentar a querela e inspirar novas interpretações.

João José R. L. de Almeida

WITTGENSTEIN UND DER WIENER KREIS

WITTGENSTEIN E O CÍRCULO DE VIENA

TEIL I

Mittwoch, 18. Dezember 1929 (bei Schlick)

⟨DER BEWEIS IN DER MATHEMATIK⟩[1]

Es gibt zwei verschiedene Beweismethoden in der Mathematik.

1. Eine Gleichung wird auf eine andere Gleichung zurückgeführt, die als richtig angenommen ist, z. B.

$$16 \times 24 = 384$$

oder

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Von den Axiomen der Arithmetik, z.B. von dem assoziativen Gesetz, meint man, daß sie mit Hilfe der vollständigen Induktion bewiesen werden. Das ist kein Beweis. Man sieht das schon daraus, daß die zu beweisende Gleichung im Beweis selbst vorkommt. Die Induktion leistet nur das, was sie leistet und nichts darüber hinaus. Z.B.:

1:3 = 0,333
10
10
10

Alles, was man dennoch sagt, z. B., daß unendlich viele Dreien darauf folgen, gehört nicht in eigentliche Mathematik. Das ist Privatangelegenheit. Die meisten meinen, daß die vollständige Induktion nur ein Weg ist, um zu einem bestimmten Satz zu gelangen; daß zur Methode der Induktion noch ein besonderer Schluß hinzutritt, der sagt: also gilt der Satz für alle Zahlen. Hier frage ich: Was ist es mit dem »also«? Es gibt kein »also«! Die vollständige Induktion ist schon der zu beweisende Satz, ist schon alles, nicht erst der Beweisweg. Die Methode ist kein Vehikel, um irgendwohin zu kommen. Es gibt in der Mathematik nicht erstens einen Satz, der schon für sich allein Sinn hätte, und dann noch zweitens die Methode, um die Wahrheit oder Falschheit eines Satzes festzustellen, sondern es gibt nur die Methode, und das, was Satz genannt wird, ist nur ein abgekürzter Name für die Methode.

Nun kann man Axiome aufstellen (z.B. die Buchstabenregeln der Algebra, a + b = b + a, etc.), die zwar an sich willkürlich sind, die aber natürlich gemäß der vollständigen Induktion gebaut sind. Mit diesen Regeln kann ich operieren, indem ich irgendeine Gleichung auf diese Grundregeln zurückführe. Aber eines können diese Regeln nicht zum Ausdruck bringen: gerade das, was die vollständige Induktion leistet. Dies zeigt sich zwar hinterher in der Anwendbarkeit dieser Regeln auf die konkreten Zahlen, aber das Wesen der vollständigen Induktion kommt in der

1. Alle in winkelförmige Klammern eingeschlossenen Wörter, Wortteile und Abschnittstitel sind Ergänzungen eingefügt von B. McGuinness zu der stenografierte Text. (A. U.)

PARTE I

Quarta-Feira, 18 de Dezembro de 1929 (na casa de Schlick)

⟨A DEMONSTRAÇÃO NA MATEMÁTICA⟩[1]

Há dois métodos de demonstração diferentes na matemática.

1. Uma equação se reduzirá a outra equação que se admite como correta, por exemplo

$$16 \times 24 = 384$$

ou

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Diz-se que os axiomas da aritmética, por exemplo, as leis de associação, são demonstrados com a ajuda da indução completa. Isto não é uma demonstração. O que já pode ser visto pelo fato de que a equação a ser demonstrada aparece na própria demonstração. A indução só efetiva o que efetiva, e nada mais além disto. Por exemplo:

1:3 = 0,333
10
10
10

Todavia, tudo o que se diz, por exemplo que dali se segue uma quantidade infinita de números três, não pertence realmente à matemática. É assunto privado. A maioria das pessoas pensa que a indução completa é só um caminho para se chegar a uma determinada proposição; que uma inferência especial que se insere no método de indução diz: portanto a proposição vale para todos os números. Aqui eu pergunto: o que é isto de "portanto"? Não existe nenhum "portanto"! A indução completa já é a proposição que se demonstra, ela já é tudo e não apenas o decurso da demonstração. O método não é um veículo para se chegar a algum lugar. Não há na matemática primeiro uma proposição que já tenha sentido por si só, e então, em segundo lugar, o método para estabelecer a verdade ou falsidade de uma proposição, senão que só há o método, e o que se chama de proposição é só um nome abreviado para o método.

Agora, pode-se estabelecer axiomas (por exemplo, as regras alfabéticas da álgebra, a + b = b + a etc.), que, conquanto sejam em si arbitrários, são naturalmente construídos de acordo com a indução completa. Posso operar com estas regras reduzindo qualquer equação a estas regras fundamentais. Mas uma coisa que estas regras não podem expressar: precisamente o que a indução completa efetiva. Ainda que isto se mostre depois, na aplicabilidade destas regras sobre números concretos, a essência da indução completa não se expressa na matemática na forma de uma proposição ou na forma de um sistema de axiomas, senão que é inexprimível. A indução

1. Todas as palavras, partes de palavras, e títulos de seções cercadas por parênteses angulares são adições ao texto taquigráfico inseridas por B. McGuinness.(N. T.)

Mathematik nicht zum Ausdruck in Gestalt eines Satzes oder in Gestalt eines Axiomensystems, sondern ist unausdrückbar. Die vollständige Induktion zeigt sich im Bau der Gleichungen. Die Axiome werden im engsten Anschluß an die vollständige Induktion aufgestellt, aber sie drücken die vollständige Induktion nicht aus. Die Axiome sind daher nicht beweisbar, sondern haben den logischen Wert von festen Sätzen.

WAS BEDEUTET DAS SUCHEN IN DER MATHEMATIK?[2]

Man kann nicht nach einem sechsten Sinn suchen. Man kann nicht ins Blaue suchen. Suchen kann ich einen Gegenstand im Raum, z.B. im Zimmer. Aber was kann es heißen, in der Mathematik nach etwas suchen? Der Raum hat offene Stellen. Habe ich das eine Zimmer durchsucht, so kann ich in das nächste gehen. Im Gegensatz dazu gibt es in der Mathematik keine offenen Stellen. Ein mathematisches System, z. B. das System des gewöhnlichen Multiplizierens, ist völlig in sich abgeschlossen. Ich kann nur in dem System suchen, nicht nach dem System. Wie groß ist 242 · 897? Das ist eine Frage innerhalb des Systems. Es gibt unbegrenzt viele solcher Fragen und Antworten. Ich kann nach der Antwort nur suchen, weil es eine Methode gibt, sie zu finden. Ebenso ist die Algebra (die Buchstabenrechnung) ein in sich geschlossenes System, ebenso die elementare Trigonometrie, wie sie auf der Schule gelehrt wird. Ich kann z.B. fragen: Ist sin2x = tg3x. Aber ich kann nicht fragen: Ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots ?$$

Das liegt nicht daran, daß die elementare Trigonometrie irgendwie in sich unvollständig wäre, daß sie gleichsam offene Stellen hätte, die einer Ergänzung bedürfen und daß nun etwa die Analysis diese Ergänzung ist. Nein, so verhält es sich nicht, sondern wir sind durchaus zu einem neuen System übergegangen, welches das alte nicht enthält, sondern einen Teil besitzt, der genau dieselbe Struktur besitzt wie das alte System. Einfache Beispiele sind: die natürlichen Zahlen und die ganzen Zahlen. Die natürlichen Zahlen sind ja nicht identisch mit den positiven Zahlen, so daß man etwa von plus zwei Soldaten sprechen könnte, so wie man von zwei Soldaten spricht, sondern wir haben hier etwas völlig Neues vor uns. Ebenso verhält es sich, wenn wir von den elementaren trigonometrischen Funktionen zu den durch Reihen definierten analytischen Funktionen übergehen. Wir machen dann die Entdeckung, daß gewisse dieser

2. Was wir in den Büchern der Mathematik finden, ist nicht die *Beschreibung von etwas*, sondern ist die Sache selbst. Wir *machen* die Mathematik. So wie man sagt: »Geschichte schreiben« und »Geschichte machen«, so kann man in gewissem Sinn nur Mathematik machen.

Die Mathematik ist ihre eigene Anwendung. Das ist kolossal wichtig. Daraus folgt sehr viel. Wenn ich sage: 3 Pflaumen + 4 Pflaumen = 7 Pflaumen, 3 Menschen + 4 Menschen = 7 Menschen, etc., so habe ich nicht die Zahlen auf verschiedene Gegenstände angewendet, sondern ich habe immer dieselbe Anwendung vor mir. Die Zahlen werden nicht vertreten, sondern sind. Vertreten werden nur die Gegenstände.

Die Richtigkeit eines arithmetischen Satzes wird nie dadurch ausgedrückt, daß ein Satz eine Tautologie ist. In der Russellschen Ausdrucksweise kann man z. B. den Satz 3 + 4 = 7 auf folgende Art darstellen:

(E3x) φx . (E4x) ψx . ~ (Ǝx) φx . ψx : ⊃ : (E7x) . φx ∨ ψx

Man könnte nun glauben, der Beweis dieser Gleichung bestehe darin, daß der angeschriebene Satz eine Tautologie ist. Aber um den Satz hinschreiben zu können, muß ich schon *wissen*, daß 3 + 4 = 7 ist. Die ganze Tautologie ist eine Anwendung der Arithmetik, nicht ihr Beweis. Die Arithmetik wird schon bei der Bildung des Satzes benützt. Daß eine Tautologie herauskommt, ist an und für sich unwesentlich. Ich kann eben die arithmetische Gleichung sowohl auf sinnvolle Sätze wie auf Tautologien anwenden. (W. A.)

completa se mostra na estrutura das equações. Os axiomas são estabelecidos, mais restritamente, em conexão com a indução completa mas não expressam a indução completa. Eis porque os axiomas não são demonstráveis, mas têm o valor lógico de proposições fixas.

O QUE SIGNIFICA O PROCURAR NA MATEMÁTICA?[2]

Não se pode procurar por um sexto sentido. Não se pode procurar no vazio. Posso procurar um objeto no espaço, por exemplo no quarto. Mas o que se pode chamar, na matemática, de procurar por alguma coisa? O espaço tem lacunas. Se vasculhei um quarto por isto, então posso ir para o próximo. Ao contrário disto, não há em matemática nenhuma lacuna. Um sistema matemático, por exemplo o sistema comum de multiplicação, é completamente fechado. Só posso procurar dentro do sistema, não pelo sistema. Quanto é 242 · 897? Esta é uma pergunta interna ao sistema. Há um número ilimitado destas perguntas e respostas. Só posso procurar pela resposta porque há um método para encontrá-la. Do mesmo modo que a álgebra (o cálculo com letras) é em si um sistema fechado, também o é a trigonometria elementar, tal como ensinada na escola. Posso perguntar, por exemplo: $\sin^2 x = \mathrm{tg}^3 x$? Mas não posso perguntar:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots ?$$

Isto não é porque a trigonometria elementar seja de alguma forma incompleta em si mesma, que ela teria, por assim dizer, lacunas que precisariam de um complemento e que a análise possivelmente seria este complemento. Não, não é assim senão que passamos inteiramente para um novo sistema que não contém o antigo, mas que possui uma parte que tem diante de mim exatamente a mesma estrutura que o antigo sistema. Exemplos simples são: os números naturais e os números inteiros. Os números naturais não são idênticos aos números positivos, de modo que se pode falar, digamos, de mais dois soldados como se fala de dois soldados, mas nós temos aqui algo completamente novo diante de nós. Acontece o mesmo quando passamos das funções trigonométricas elementares para as funções analíticas definidas em séries. Descobrimos então que algumas dessas funções têm as mesmas propriedades das funções sin x etc., que são bem conhecidas da trigonometria, e nós atribuímos esta estrutura às funções elementares. Tem-se, no entanto, que levar em conta que é impossível passar de um sistema para o outro por

2. O que encontramos nos livros de matemática não é a *descrição de algo*, mas a própria coisa. Nós *fazemos* matemática. Tal como se diz: "escrever a história" e "fazer a história", só se pode também, em certo sentido, fazer matemática.

A matemática é a sua própria aplicação. Isto é colossalmente importante. A partir disto, segue-se muita coisa. Quando digo: 3 ameixas + 4 ameixas = 7 ameixas, 3 pessoas + 4 pessoas = 7 pessoas etc, não apliquei os números a objetos diferentes, mas tenho sempre diante de mim a mesma aplicação. Os números não são representados, mas estão ali. Só os objetos são representados.

A correção de uma proposição aritmética nunca é expressa pelo fato de que uma proposição seja uma tautologia. No modo de expressão de Russell, pode-se, por exemplo, apresentar a proposição 3 + 4 = 7 da seguinte maneira:

(E3x) φx . (E4x) ψx . ~ (Ǝx) φx . ψx : ⊃ : (E7x) . φx ∨ ψx

Pode-se agora acreditar que a demonstração desta equação consiste em que a proposição escrita seja uma tautologia. Mas para que a proposição possa ser anotada, já tenho que *saber* que 3 + 4 = 7. A tautologia no todo é uma aplicação da aritmética, não a sua demonstração. A aritmética já é utilizada pela formação da proposição. Que se chegue a uma tautologia, não é em si e por si essencial. Posso aplicar a equação aritmética tanto para proposições significativas quanto para tautologias. (N. W.)

Funktionen dieselben Eigenschaften haben wie die uns aus der Trigonometrie her wohlbekannten Funktionen sin x etc., und wir ordnen nun diese Gebilde den elementaren Funktionen zu. Man muß sich aber wohl vor Augen halten, daß es unmöglich ist, von dem einen System durch bloße Ausdehnung zu dem anderen überzugehen; daß eine Frage, die Sinn hat in dem zweiten System, deswegen noch keinen Sinn zu haben braucht in dem ersten. Das neue System ist keine Vervollständigung des alten. Das alte System hat keine offenen Stellen. Was man noch nicht hat, hat man überhaupt nicht.

Ich kann nicht systematisch und unsystematisch zum selben kommen.

Ich kann von einem Satz nicht erklären, daß er zu einem System gehört.

Ich kann in der Sprache des ersten Systems nicht sagen, was lösbar ist und was nicht lösbar ist.

Die Frage besteht gar nicht.

Beispiel: Dreiteilung des Winkels

Kann man in der elementaren Geometrie danach suchen? Die Unmöglichkeit der Konstruktion kann nicht im System der elementaren Geometrie eingesehen werden, sondern im System der algebraischen Zahlen und Gleichungen, auf welche die elementare Geometrie projiziert wird. Dieses System ist viel umfassender und erlaubt es, die durch Zirkel und Lineal herstellbaren Gebilde algebraisch zu charakterisieren. In diesem System hat die Frage nach der Dreiteilung einen klaren Sinn. Aber zugleich mit der Frage besteht auch schon die Methode der Beantwortung. Aber hat die Frage in der elementaren Geometrie überhaupt einen klaren Sinn? Man möchte zunächst meinen: ja. Denn irgend etwas muß doch den vielen Leuten vorgeschwebt haben, die den Ehrgeiz hatten, dieses Problem zu lösen.

Gleichnis: Lösung eines Knotens

Wie, wenn es gar kein Knoten ist, sondern nur so aussieht? Dann kann man auch nicht versuchen, ihn aufzulösen. Man tut zwar etwas, was mit der Auflösung eines Knotens eine gewisse Ähnlichkeit hat. Aber man kann tatsächlich, im strengen Sinne, nach der Lösung des Knotens gar.nicht suchen. Es wäre eine *logische* Unmöglichkeit, die Auflösung zu versuchen.

Ebensowenig kann man nach der Lösung des Problems der Dreiteilung des Winkels suchen. Die Frage besteht gar nicht in diesem System. Was ich tue, ist folgendes: *ich dehne meine Syntax aus*.

Weyl[3] formuliert das Entscheidbarkeitsproblem so: Kann jede *einschlägige* Frage mit Hilfe logischen Schließens entschieden werden? So darf man das Problem nicht formulieren. Alles kommt auf dasselbe Wort »einschlägig« an. Für Weyl ist eine Aussage einschlägig, die aus gewissen Grundformeln mit Zuhilfenahme von sieben Kombinations-Prinzipien (darunter »alle« und »es gibt«) aufgebaut ist.[4] Hier liegt der Fehler. Eine Aussage ist einschlägig, wenn sie einem *bestimmten System* angehört.

In diesem Sinne hat man behauptet: Jede einschlägige Frage ist entscheidbar.

3. H. Weyl, »Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft« in *Handbuch der Philosophie*, hrsg, A. Bäumler u. M. Schröter, Bd. II, München u. Berlin, 1927, S. 20. (F. H.)
4. Ebd. S. 5. (F. H.)

mera extensão; que uma pergunta que tem sentido no segundo sistema, não precisa ter por isto nenhum sentido no primeiro. O novo sistema não é uma complementação do antigo. O antigo sistema não tem lacunas. O que não se pegou ainda, não dá para pegar mais.

Não posso chegar à mesma coisa de forma sistemática e não-sistemática.

Não posso explicar que uma proposição pertence a um sistema.

Não posso dizer na linguagem do primeiro sistema o que é solucionável e o que não é solucionável.

A pergunta sequer existe.

Exemplo: Trissecção do Ângulo

Pode-se procurar por isto na Geometria Elementar? A impossibilidade da construção não pode ser entendida no sistema da Geometria Elementar, mas no sistema dos números algébricos e equações nos quais a Geometria Elementar é projetada. Este sistema é muito mais abrangente e permite caracterizar algebricamente estruturas factíveis com compasso e régua. Neste sistema a pergunta pela trissecção tem um sentido claro. Mas, ao mesmo tempo que a pergunta, também já existe o método de respondê-la. Mas a pergunta tem, afinal, um sentido claro na Geometria Elementar? A princípio, gostaríamos de pensar: que sim. Pois muita gente que tinha a ambição de resolver este problema tem que ter tido em mente alguma coisa.

Comparação: Desatamento de um Nó

E se não houver nenhum nó, e só parecer que sim? Então não se pode nem tentar desenlaçá-lo. Na realidade, faz-se alguma coisa que tem uma certa semelhança com o desenlace de um nó. Mas não se pode, de fato, num sentido forte, procurar pelo desatamento de um nó. Seria uma impossibilidade *lógica* tentar o desenlace.

Tampouco pode-se procurar pelo desenlace do problema da trissecção do ângulo. A pergunta não existe dentro do sistema. O que faço é o seguinte: *expando a minha sintaxe*.

Weyl[3] formula o problema da decidibilidade assim: toda questão relevante pode ser decidida com a ajuda da inferência lógica? Então não se pode formular o problema. Tudo depende da própria palavra "relevante". Para Weyl, um enunciado relevante é construído a partir certas fórmulas básicas com o auxílio de sete princípios de combinação (entre eles "todo" e "existe").[4] Aqui está o erro. Um enunciado é relevante se pertencer a um determinado sistema.

Neste sentido é que se afirmou: toda questão relevante é decidível.

O que não é visivelmente relevante, não é, afinal, relevante.

3. H. Weyl, »Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft« in *Handbuch der Philosophie*, hrsg, A. Bäumler u. M. Schröter, Bd. II, München u. Berlin, 1927, p. 20. (N. E.)
4. Id., p. 5. (N. E.)

Was nicht sichtbar einschlägig ist, ist überhaupt nicht einschlägig.

GEOMETRIE ALS SYNTAX I

Einstein[5] sagt, daß es die Geometrie mit den Lagerungsmöglichkeiten der starren Körper zu tun hat. Wenn ich tatsächlich Lagerungen der starren Körper durch die Sprache beschreibe, dann kann den Lagerungs*möglichkeiten* nur die *Syntax* dieser Sprache entsprechen.

[Es ist daher kein Problem, daß wir die gesamte Mannigfaltigkeit des Raumes mit einigen wenigen Axiomen beherrschen (daß der Raum eine »definite Mannigfaltigkeit« ist (Husserl[6])), denn wir stellen ja nur die Syntax einer Sprache auf.]

WIDERSPRUCHSFREIHEIT I[7]

Sonntag, 22. Dezember 1929 (*bei Schlick*)

»ALLE« I

Ich rede zunächst von dem gewöhnlichen »alle«, z.B. »Alle Menschen in diesem Zimmer haben Hosen an«. Woher weiß ich das? Der Satz meint: »Herr Professor Schlick hat Hosen an, Waismann hat Hosen an, Wittgenstein hat Hosen an, *und sonst ist niemand da*.« Jede vollständige Aufzählung muß abschließen mit den Worten »und sonst nichts«. Was bedeutet das? Es gibt hier die Auffassung, daß man sagt: »Herr Carnap ist nicht im Zimmer, Herr … usw.« Und den Satz, den man jetzt vielleicht vermuten würde, nämlich »das sind alle Dinge«, den gibt es nicht.

Nehmen wir an, ich würde sagen »Ich sehe ein Quadrat und darin einen Kreis«. Es ist klar, daß das keine Aufzählung ist, sondern etwas ganz anderes. Ich glaube, daß es hier eine Art Satz gibt, von der ich früher keine Ahnung hatte und die ungefähr dem entspricht, was ich ein unvollständiges Bild nennen möchte. Ich werde gleich erklären, was ich damit meine. Es handelt sich nämlich in allen solchen Fällen darum, daß es etwas gibt, was ich jetzt einen Elementarsatz nennen werde, der ein unvollständiges Bild ist. Denken sie sich folgenden Fall: Ich habe zwei Stoffe gesehen von der gleichen Farbe. Da könnte man glauben, es heißt: »Es waren beide grün oder beide blau oder …« Es ist uns allen klar, daß es das nicht heißen kann. Wir können ja eine solche Aufzählung nicht produzieren. Dagegen ist es so: »Wir haben einen Stoff gesehen von der Farbe x und einen anderen von der Farbe x.« Es handelt sich darum, daß die Russellsche Analyse nicht stimmt, und zwar ist der Unterschied der:

$$(\exists x) \,.\, \varphi x$$

dieses Zeichen läßt eine doppelte Negation zu, nämlich eine äußere und eine innere. Unser Fall hat nicht den Charakter einer scheinbaren Variablen, sondern einer wirklichen. Ich steure darauf hin, daß die Russellsche Analyse, die ich früher für richtig gehalten habe, in diesem Falle

5. *Geometrie und Erfahrung*, Berlin, 1921, S. 6-7; *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Braunschweig, 1917, S. 2. (F. H.)

6. »Ideen zu einer reinen Phänomenologie« § 72, *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, I, 1913, S. 133. (F. H.)

7. Von diesem Teil der Konversation Wittgensteins gibt es keine Notizen, aber 2⅓, Seiten des Notizbuches sind freigelassen. (F. H.)

GEOMETRIA COMO SINTAXE I

Einstein[5] diz que a geometria tem a ver com as possibilidades de posição dos corpos rígidos. Se descrevo, de fato, a posição dos corpos rígidos pela linguagem, então as *possibilidades* de posição só podem corresponder à *sintaxe* desta linguagem.

[Portanto, não há nenhum problema em que dominemos toda a multiplicidade do espaço com alguns poucos axiomas (que o espaço seja uma “multiplicidade definida” (Husserl[6])), pois nós só estabelecemos a sintaxe de uma linguagem.]

CONSISTÊNCIA I[7]

Domingo, 22 de Dezembro de 1929 (*na casa de Schlick*)

“TODO” I

Vou falar agora do “todo” habitual, por exemplo “Todas as pessoas nesta sala vestem calças”. Como sei disto? A proposição quer dizer: “O Professor Schlick veste calças, Waismann veste calças, Wittgenstein veste calças, *e ninguém mais está ali*.” Toda enumeração completa tem que concluir com as palavras “e nada mais”. O que significa isto? Existe aqui uma concepção de que se diz: “O Sr. Carnap não está na sala, o Sr. …, e assim por diante.” E não existe aqui a proposição que talvez se presuma, a saber, “estas são todas as coisas”.

Suponhamos que eu dissesse “Vejo um quadrado e nele um círculo”. É claro que isto não é uma enumeração, mas algo completamente diferente. Acredito que haja aqui um tipo de proposição da qual não tinha antes nenhuma ideia e que corresponde aproximadamente ao que chamaria de uma imagem incompleta. Vou explicar logo o que quero dizer com isto. Trata-se particularmente, em todos os casos como este, em que há algo que agora vou chamar de proposição elementar, de uma imagem incompleta. Imaginem o seguinte caso: vi duas substâncias da mesma cor. Pode-se acreditar que significa: “Ambos eram verdes, ou ambos azuis, ou …”. Está claro para todos nós que não pode significar isto. Não podemos produzir uma enumeração assim. Diversamente, seria assim: “Vimos uma substância da cor x e outra da cor x”. A questão é que a análise de Russell está incorreta, e a diferença, especificamente, é que:

$$(\exists x) \,.\, \varphi x$$

este sinal permite uma dupla negação, a saber, uma externa e uma interna. Nosso caso não tem o caráter de uma variável aparente, mas o de uma real. Eu me inclino a que a análise de Russell, que antes tomava como correta, não se aplica a este caso. “Nesta sala não há nenhuma pessoa” não significa: “Nesta sala não está o Professor Schlick, nem o Sr. Carnap, nem o Sr. …”. Acredito

5. *Geometrie und Erfahrung*, Berlin, 1921, pp. 6-7; *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Braunschweig, 1917, p. 2. (N. E.)

6. »Ideen zu einer reinen Phänomenologie« § 72, *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, I, 1913, p. 133. (N. E.)

7. Não há mais notas desta parte da conversa de Wittgenstein, 2⅓ das páginas do caderno são deixadas em branco. (N. E.)

nicht gilt. »In diesem Zimmer ist kein Mensch« heißt nicht: »In diesem Zimmer ist nicht der Herr Professor Schlick, nicht der Herr Carnap nicht der Herr ...« Ich glaube nun, der Prozeß, wenn ich darauf komme, daß niemand im Zimmer ist, ist derselbe wie der, wenn ich darauf komme, daß kein Kreis in einem Quadrat ist. »In dem Quadrat ist ein Kreis.« Das hat nicht den Sinn: »Entweder der Kreis ist in dem Quadrat oder der Kreis oder ...« Von einer Aufzählung ist hier keine Rede. Es ist vielmehr das, was ich ein unvollständiges Bild nenne.

Ich kann einen Tatbestand beschreiben, der darin besteht, daß ein Kreis von bestimmter Größe an einer bestimmten Stelle des Quadrats ist. Das ist ein vollständiges Bild. Es kommt für das folgende nicht darauf an, welche Beschreibung ich wähle, ob ich z.B. mit Koordinaten arbeite, sondern nur darauf, daß die gewählte Beschreibungsform die richtige Mannigfaltigkeit hat. Wenn also in diesem Satz Zahlen vorkommen, die andeuten, wo der Kreis ist und wie groß er ist, so kann es vorkommen, daß ich statt der Zahlen Variablen einsetze oder vielleicht nur Intervalle, z. B. [6-7, 8-9] und ich erhalte dann ein unvollständiges Bild. Denken Sie sich ein Porträt, in dem ich den Mund weglasse, so kann das zweierlei bedeuten: erstens, der Mund ist weiß wie das blanke Papier. Zweitens: wie immer der Mund ist, das Bild ist immer richtig.

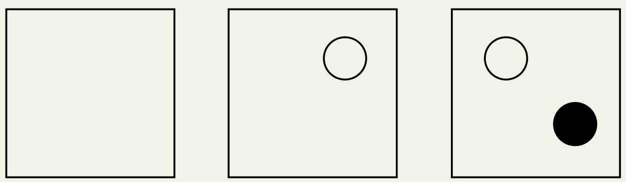
Das unvollständige Bild besteht darin, daß in dem Satz Variablen vorkommen. Und jetzt ist die Frage: Wie lautet der richtige Ausdruck des Satzes? Ich meine: der Ausdruck lautet nicht: »(∃x) . φx«, sondern »φx«. Der Unterschied zwischen beiden ist folgender: Das Zeichen »(∃x) . φx« läßt eine doppelte Negation zu, das Zeichen »φx« nicht. Das zeigt schon, daß das Zeichen »(∃x) . φx« nicht die richtige Mannigfaltigkeit hat. Ferner: was entsteht, wenn ich die doppelte Negation ausführe?

$$\sim (\exists x) . \sim \varphi x = (x) . \varphi x$$

Das heißt: »Die beiden Stoffe stimmen in allen Farben überein«, »Sie haben alle Farben gemeinsam«. Das ist Unsinn. Dann muß auch der Satz »(∃x) . φx« Unsinn sein.

»φx« ist also ein richtiger Satz, nicht erst in Vorbereitung zu einem Satz. Ich glaube jetzt, daß man in einem Elementarsatz gewisse Angaben weglassen kann. Der Satz ist dann ein unvollständiges Porträt eines Sachverhaltes.

Wenn ich nun die Beschreibung vervollständige, bedeutet das, daß ich zu einem unvollständigen Satz weitere unvollständige Sätze hinzufüge? Ist die vollständige Beschreibung einfach die Konjunktion der unvollständigen? Wenn ich folgendes Bild mache:



Jeder Satz ist *ein* Zeichen. Das Zeichen ist nicht zusammengesetzt aus dem Zeichen des Quadrates und dem des Kreises. Wenn ich das eine Zeichen weglasse, so erhalte ich noch immer ein Bild – im Gegensatz zur gewöhnlichen Auffassung von Sachen, wo ich durch Weglassung eines Satzteils nur die Vorbereitung zu einem Satze erhalte.

Der Satz: »In dem Quadrat ist ein schwarzer Kreis« enthält nichts als die Worte »Quadrat« »schwarz« »Kreis« und »in«. Das ist

alles. Der Satz kann nicht mehr sagen, als was er enthält und daß wir ihn verstehen, zeigt, daß er schon in dieser unvollständigen Gestalt ein Satz ist.

agora que o processo, quando chego à conclusão de que não há ninguém na sala, é o mesmo que quando chego à conclusão de que não há nenhum círculo em um quadrado. “No quadrado tem um círculo”, não tem o sentido: “Ou o círculo está no quadrado, ou o círculo, ou ...”. Não se fala aqui de enumeração. Isto é, antes, o que chamo de imagem incompleta.

Posso descrever uma circunstância que consiste em que um círculo de determinado tamanho está em um determinado lugar do quadrado. Esta é uma imagem completa. Para o que se segue, não importa que descrição escolho, se, por exemplo, trabalhe com coordenadas, mas só que a forma de descrição escolhida tenha a multiplicidade correta. Se, portanto, ocorrem números nesta proposição que indiquem onde está o círculo e qual o seu tamanho, então pode ocorrer que eu, em vez números, coloque variáveis ou talvez só intervalos, por exemplo [6-7, 8-9], e obtenha, então, uma imagem incompleta. Imagine um retrato em que eu deixe a boca de fora, então isto pode significar duas coisas: primeiro, que a boca é tão branca quanto o papel puro. Segundo: qualquer que seja a boca, a imagem está sempre certa.

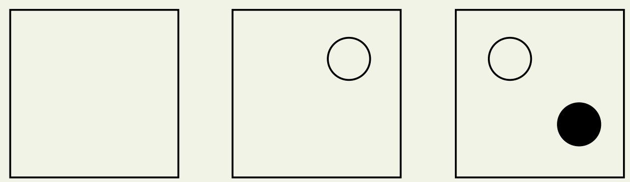
A imagem incompleta consiste na ocorrência de variáveis na proposição. E agora a pergunta é: qual é o teor da expressão correta da proposição? Quero dizer: o teor da expressão não é “(∃x) . φx”, mas “φx”. A diferença entre ambas é a seguinte: o sinal “(∃x) . φx” permite uma dupla negação, o sinal “φx”, não. Isto já mostra que o sinal “(∃x) . φx” não tem a multiplicidade correta. Além do mais: o que se produz quando efetuo a dupla negação?

$$\sim (\exists x) . \sim \varphi x = (x) . \varphi x$$

Isto significa: “As duas substâncias concordam com todas as cores”, “Elas têm todas as cores em comum”. Isto é um contrassenso. Então, “(∃x) . φx” tem que ser um contrassenso também.

“φx” é, portanto, uma proposição correta, não apenas como preparação para uma proposição. Eu acredito agora que se pode deixar de fora certos dados numa proposição elementar. A proposição é, então, um retrato incompleto de um estado de coisas.

Agora, se completo a descrição, isto significa que acrescento a uma proposição incompleta mais proposições incompletas? A descrição completa é simplesmente a conjunção de proposições incompletas? Se desenho a seguinte imagem:



Toda proposição é *um* sinal. O sinal não é a composição do sinal do quadrado e do círculo. Se deixo de fora um sinal, ainda assim obtenho uma imagem – em contraste com a concepção usual das coisas, pela qual, pela omissão de uma parte da proposição, só obtenho a preparação de uma proposição.

A proposição: “No quadrado há um círculo preto” nada contém, exceto as palavras “quadrado”, “preto”, “círculo” e “no”. Isto é tudo. A proposição não pode dizer mais do que ela contém, e que nós a compreendamos mostra que ela já é uma proposição nesta forma incompleta.

A imagem incompleta tem que mostrar que ela é *incompleta*.[8] Tem que se notar na proposição que ela é só um retrato incompleto de um estado de coisas. A proposição tem que mostrar que

8. Se descrevo completamente tudo o que está na sala, isto ainda não é uma imagem completa. Pois posso perguntar o que está fora da sala. Então tenho que poder ver também na proposição que ela ainda não descreve tudo. A proposição tem que mostrar a sua abertura. (N. W.)

Das unvollständige Bild muß zeigen, daß es *unvollständig* ist.[8] Man muß dem Satz anmerken, daß er nur ein unvollständiges Porträt des Sachverhalts ist. Der Satz muß zeigen, daß alles um ihn herum etwas offen bleibt. Er muß seine Offenheit zeigen. *Ein* Elementarsatz beschreibt die gesamten Farben im Raum.

Vielleicht ist es so: Alle unvollständigen Beschreibungen – alle unvollständigen Sätze mit offenen Stellen – schließen sich zu einem vollständigen Elementarsatz zusammen.

Ist der vollständige Satz die Konjunktion der unvollständigen Sätze?

Gegenstände

Das hängt zusammen mit der Vorstellung, die man sich von den Gegenständen macht.

Wenn Frege und Russell von Gegenständen gesprochen haben, so hatten sie immer das im Auge, was sprachlich durch ein Substantiv wiedergegeben wird, also sagen wir die Körper wie Stühle und Tische. Die ganze Auffassung der Gegenstände hängt also aufs engste zusammen mit der Subjekt-Prädikat Form der Sätze. Es ist klar, wo es keine Subjekt-Prädikat Form gibt, da kann man auch in diesem Sinne nicht von Gegenständen sprechen. Nun kann ich das Zimmer auch ganz anders beschreiben, z. B. so: Ich beschreibe die Oberfläche des Zimmers analytisch durch eine Gleichung und gebe die Verteilung der Farben auf dieser Fläche an. Bei dieser Form der Beschreibung ist keine Rede mehr von einzelnen »Gegenständen«, von Stühlen, Büchern, Tischen und ihrer räumlichen Stellung. Wir haben hier keine Relation, alles das gibt es nicht.

Nun meine ich: Für das ganze Gebiet der Elementarsätze herrscht ein Grundsatz, und der lautet: Die Form der Elementarsätze läßt sich nicht vorhersehen. Es ist einfach lächerlich, wenn man glaubt, hier mit der gewöhnlichen Form der Umgangssprache, mit Subjekt-Prädikat, mit dualen Relationen und so weiter auszukommen. Schon das eine, daß im Elementarsatz die reelle Zahl oder etwas der reellen Zahl Ähnliches auftreten kann, beweist, wie völlig verschieden der Elementarsatz von allen übrigen Sätzen sein kann. Und was da noch alles auftreten kann, das können wir heute unmöglich voraussehen. Erst wenn wir die Phänomene logisch analysieren, wissen wir, welche Form die Elementarsätze haben. Hier ist ein Gebiet, wo es keine Hypothese gibt. Der logische Bau der Elementarsätze braucht nicht die geringste Ähnlichkeit zu haben mit dem logischen Bau der Sätze.

Denken Sie einfach an die physikalischen Gleichungen: wie enorm komplex sind diese gebaut. Von dieser Komplexität werden auch die Elementarsätze sein.

Welche Farbe immer ich sehe, jede kann ich wiedergeben, indem ich die vier Urfarben rot, gelb, blau, grün angebe und hinzufüge, wie diese Farbe aus den Urfarben zu erzeugen ist.

Diskussion über die Form des Farbkörpers. Die Urfarben sehr scharf:[9]

8. Wenn ich alles, was im Zimmer ist, vollständig beschreibe, so ist das noch immer kein vollständiges Bild. Denn ich kann fragen, was außerhalb des Zimmers ist. Dann muß ich aber auch im Satz sehen können, daß er noch nicht alles beschreibt. Der Satz muß seine Offenheit zeigen. (W. A.)

9. Der Grund hierfür wird in PhB S. 278 ff. erklärt. (F. H.)

ao seu redor alguma coisa permanece aberta. Ela tem que mostrar a sua abertura. *Uma* proposição elementar descreve a totalidade das cores no espaço.

Talvez este seja o caso: todas as descrições incompletas – todas as proposições incompletas com lacunas – se combinam para formar uma proposição elementar completa.

A proposição completa é a conjunção de proposições incompletas?

Objetos

Isto tem a ver com a ideia que se faz de objetos.

Quando Frege e Russell falaram de objetos tinham sempre em vista o que se reproduz verbalmente por um substantivo, assim falamos dos corpos como cadeiras e mesas. Toda a concepção de objetos está, portanto, estreitamente relacionada com a forma sujeito-predicado da proposição. É claro que onde não há uma forma sujeito-predicado não se pode falar de objetos neste sentido. Ora, posso descrever a sala de modo totalmente diferente, por exemplo assim: descrevo analiticamente a superfície da sala mediante uma equação e indico a distribuição das cores nesta área. Nesta forma, a descrição não é mais uma fala sobre "objetos" individuais, sobre cadeiras, livros, mesas e sua posição espacial. Nós não temos aqui nenhuma relação, tudo isso não existe.

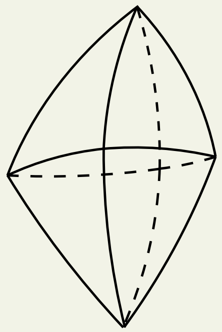
Agora, eu quero dizer: para todo o campo das proposições elementares domina um princípio, e ele reza: a forma das proposições elementares não pode ser prevista. É simplesmente ridículo se se acredita que nos arranjamos aqui com a forma usual da fala coloquial, o sujeito-predicado, as relações duais e assim por diante. Já o fato de que pode aparecer na proposição elementar o número real ou algo semelhante ao número real comprova como ela pode ser completamente diferente de todas as outras proposições. E o que mais pode nela ainda aparecer não podemos prever hoje. Somente quando analisamos logicamente os fenômenos sabemos que forma têm as proposições elementares. Aqui há um campo onde não há hipóteses. A construção lógica das proposições elementares não precisa ter a menor semelhança com a construção lógica das proposições.

Basta pensar nas equações físicas: quão enormemente complexas são essas estruturas. As proposições elementares também têm a mesma complexidade.

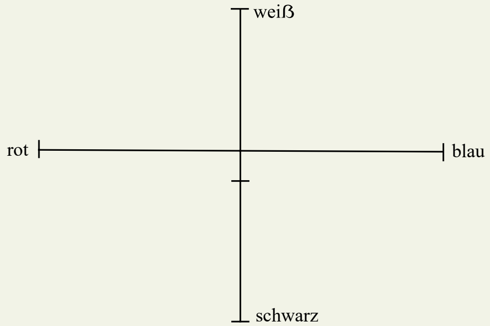
Qualquer cor que veja, posso reproduzir indicando as quatro cores primárias, vermelho, amarelo, azul, verde, e acrescentando como esta cor é gerada das cores primárias.

Discussão sobre a forma do pigmento da cor. As cores primárias são muito nítidas:[9]

9. As razões daqui são explicadas em PR, p. 278 ss. Cf. tb. TS 209, pp. 125-128. (N. E.)



Zeichen einer Farbe:



Jede Aussage über Farben kann mit Hilfe solcher Symbole dargestellt werden. Sagen wir, wir würden mit vier Urfarben auskommen, dann nenne ich solche gleichberechtigte Symbole *Elemente der Darstellung*. Diese Elemente der Darstellung sind die »Gegenstände«.

Jetzt hat die Frage keinen Sinn: Sind die Gegenstände etwas Dinghaftes, etwas, das an Subjektstelle steht oder etwas Eigenschafthaftes[10] oder sind sie Relationen und so weiter? Von Gegenständen sprechen wir einfach dort, wo wir gleichberechtigte Elemente der Darstellung haben.

Jetzt sehen Sie sofort, daß die Frage nach der Zahl der Gegenstände keinen Sinn hat. Insbesondere kann es nicht unendlich viele Gegenstände geben. »Es gibt unendlich viele Sessel« = »Es gibt unendlich viele Möglichkeiten von Sesseln im Raum«. Dagegen kann es das nicht mehr heißen, wenn ein Gegenstand ein Element der Darstellung ist.

Die logische Multiplizität wird nicht durch Subjekt und Prädikat oder durch Relation abgebildet, sondern z. B. durch die physikalischen Gleichungen. Es ist klar, daß hierbei von einzelnen Gegenständen nicht mehr die Rede ist.

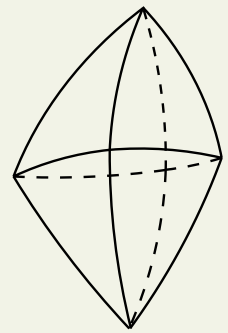
Was bedeutet »alle«?

1. »Alle Menschen in diesem Zimmer haben Hosen an«[11]

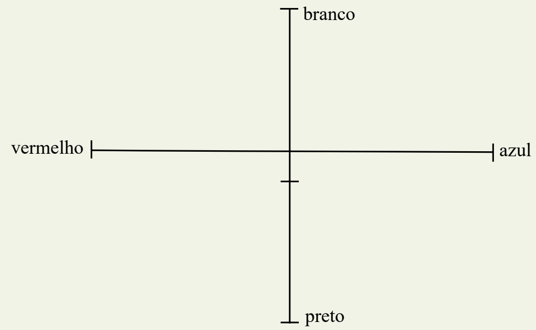
Hier handelt es sich zunächst darum, ob »Mensch« eine Form oder ein Prädikat ist. Ist »Mensch« eine Form, so wie z. B. »Farbe«, so kann ich nicht sagen »a ist ein Mensch«, sondern

10. Das Stenogramm scheine »etwas Eigenschaft hat« zu sagen. In der Maschinenschrift der *Thesen* kommt »eigenschaftshaft« vor (vgl. unten, S. 251, wo das mittlere ‘s’ ausgelassen ist). (F. H.)

11. Russell: »Ich habe einen Menschen getroffen« (»(∃x) . fx«) ist eine unbestimmte Aussage. (W. A.)



sinal de uma cor:



Todo enunciado sobre cores pode ser apresentado com a ajuda de tais símbolos. Se dizemos que nos arranjamos com quatro cores primárias, então chamo estes símbolos equitativos de *elementos da apresentação*. Estes elementos da apresentação são os “objetos”.

Agora esta pergunta não tem nenhum sentido: os objetos são alguma coisa coisificada, algo que fica na posição de sujeito ou algo vinculado à propriedade,[10] ou são eles relações e assim por diante? Falamos de objetos simplesmente ali onde temos elementos de apresentação equitativos.

Agora vocês logo veem que a pergunta pelo número de objetos não tem nenhum sentido. Em particular, não há um número infinito de objetos. “Há um número infinito de cadeiras” = “Há um número infinito de possibilidades de cadeiras no espaço”. Por outro lado, não pode mais haver este significado se um objeto é um elemento de apresentação.

A multiplicidade lógica não é mais afigurada por sujeito e predicado ou por relação, mas, por exemplo, pelas equações da física. É claro que, com isto, não se trata mais de objetos individuais.

O que significa “todo”?

1. “Todas as pessoas nesta sala vestem calças”[11]

Em primeiro lugar, trata-se de saber se “pessoa” é uma forma ou um predicado. Se “pessoa” é uma forma como, por exemplo, “cor”, não posso dizer “a é uma pessoa”, mas a sintaxe de “a”

10. A estenografia parece dizer “algo tem propriedade”. No datiloscrito da *Thesen* ocorre “vinculado à propriedade” (cf. na p. 251, onde o ‘s’ está ausente). (N. E.)

11. Russell: “Eu encontrei uma pessoa” (“(∃x) . fx”) é um enunciado indeterminado. (N. W.)

die Syntax von »a« muß das zeigen. Ist »Mensch« ein Prädikat, so gibt es einen Satz von der Form »a ist ein Mensch«.

»φx« = »x ist ein Mensch«

»ψx« = »x hat Hosen an«

»Alle Menschen haben Hosen an« = »(x):φx.⊃ψx«

oder »(x).φx«

»Alle Menschen in diesem Zimmer«: Das muß genau so sein wie ein Kreis in einem Quadrat. Das heißt: Prof. Schlick hat Hosen an, Waismann hat Hosen an, Wittgenstein hat Hosen an. Und der Satz, der jetzt folgen sollte, nämlich: »Außer diesen ist niemand im Zimmer«, dieser Satz muß einfach heißen »~ fx«.

[Angenommen »Mensch« ist eine Form:

»φx« = »x ist im Zimmer«

»φx« = »Es ist jemand im Zimmer«

»~φx« = »Es ist niemand im Zimmer«

»(Ǝx).φx« = »φa ∨ φb ∨ φc ∨ ....«

»~ (Ǝx).φx« = »Es gibt niemand, der im Zimmer ist«

»(Ǝx). ~ φx« = »Es gibt jemanden, der nicht im Zimmer ist«

»~ (Ǝx). ~ φx« = »Alle sind im Zimmer«

Nun kann man wieder argumentieren: »Es ist jemand im Zimmer« läßt nur eine Verneinung zu. »(Ǝx).φx« aber läßt eine doppelte Negation zu. Folglich wird der Sinn des Satzes »Es ist jemand im Zimmer« durch das Russellsche Symbol nicht richtig dargestellt.

»Alle Menschen in diesem Zimmer haben Hosen an«

= φa.ψa.φb.ψb.φc.ψc.~ φx

x≠a, x≠b, x≠c

Hier wäre die Frage: Ist »(Ǝx).φx« zulässig, worin unterscheidet sie sich von »φx« ? Oder ist nur »φx« zulässig und »(Ǝx).φx« nicht? Für welche Aussagefunktion kann der »(Ǝx)«-Operator gesetzt werden und für welche nicht?]

2. *Aussagen über alle Farben*

Da es nur vier Elemente der Darstellung gibt, *rot, blau, gelb, grün*, so läßt sich jede solche Aussage zurückführen auf eine endliche Konjunktion:

rot ... und blau ... und gelb ... und grün (...)

In diesem Fall ist also »alle« ein logisches Produkt, aber ein *endliches* logisches Produkt.

3. »*Alle Zahlen*«

Hier wissen wir, daß der Satz falsch aufgefaßt wurde und daß die vollständige Induktion gar nichts mit der Allheit der Zahlen zu tun hat.

SOLIPSISMUS

Ich habe früher geglaubt, daß es die Umgangssprache gibt, in der wir alle für gewöhnlich sprechen und eine primäre Sprache, die das ausdrückt, was wir wirklich wissen, also die Phä-

tem que mostrar isto. Se “pessoa” é um predicado, então existe uma proposição da forma “a é uma pessoa”?

»φx« = »x é uma pessoa«

»ψx« = »x veste calças«

»Todas as pessoas vestem calças« = »(x):φx.⊃ψx«

ou »(x).φx«

“Todas as pessoas nesta sala”: tem que ser tão exato quanto um círculo num quadrado. Significa: Prof. Schlick veste calças, Waismann veste calças, Wittgenstein veste calças. E a proposição que deve se seguir, a saber: “Além destes não há ninguém na sala”, esta proposição tem que simplesmente ser lida como: “~fx”.

[Suponhamos que “pessoa” seja uma forma:

»φx« = »x está na sala«

»φx« = »Alguém está na sala«

»~φx« = »Ninguém está na sala«

»(Ǝx).φx« = »φa ∨ φb ∨ φc ∨ ....«

»~ (Ǝx).φx« = »Não há ninguém que esteja na sala«

»(Ǝx). ~ φx« = »Há alguém que não está na sala«

»~ (Ǝx). ~ φx« = »Todos estão na sala«

Agora, pode-se argumentar novamente: “Alguém está na sala” só permite uma negação. Mas “(Ǝx).φx” permite uma dupla negação. Consequentemente, o sentido da proposição “Há alguém na sala” não é apresentado corretamente pelo simbolismo Russelliano.

“Todas as pessoas nesta sala vestem calças”

= φa.ψa.φb.ψb.φc.ψc.~ φx

x≠a, x≠b, x≠c

Aqui a pergunta seria: “(Ǝx).φx” é admissível, como se diferencia de “φx”? Ou só “φx” é admissível e “(Ǝx).φx”, não? Para que função proposicional pode o operador “(Ǝx)” ser colocado e para qual não?]

2. *Enunciados Sobre Todas as Cores*

Posto que só existem quatro elementos de apresentação, *vermelho, azul, amarelo, verde*, cada um desses enunciados pode ser reduzido a uma conjunção finita:

vermelho ... e azul ... e amarelo ... e verde (...)

Neste caso, “todo” é, portanto, um produto lógico, mas um produto lógico *finito*.

3. “*Todos os Números*”

Aqui sabemos que a proposição foi mal concebida e que a indução completa nada tem a ver com a totalidade dos números.

SOLIPSISMO

Antes eu acreditava que havia uma linguagem ordinária que todos nós habitualmente falamos, e uma linguagem primária que expressava o que realmente queremos saber, ou seja, os fenomene.[12][13] Ich habe auch von einem ersten System und einem zweiten System gesprochen. Ich möchte jetzt ausführen, warum ich an dieser Auffassung nicht mehr festhalte.

Ich glaube, daß wir im Wesen nur eine Sprache haben und das ist die gewöhnliche Sprache. Wir brauchen nicht erst eine neue Sprache zu erfinden oder eine Symbolik zu konstruieren, sondern die Umgangssprache *ist* bereits *die* Sprache, vorausgesetzt, daß wir sie von den Unklarheiten, die in ihr stecken, befreien.

Unsere Sprache ist schon vollkommen in Ordnung, wenn man sich nur im klaren darüber ist, was sie symbolisiert. Andere als die gewöhnlichen Sprachen sind auch wertvoll, insofern sie uns zeigen, was das Gemeinsame zwischen ihnen ist. Für gewisse Zwecke, z. B. zur Darstellung der Verhältnisse des Schließens, ist eine künstliche Symbolik sehr nützlich. Tatsächlich haben Frege, Peano und Russell bei dem Aufbau der symbolischen Logik immer nur die Anwendung auf die Mathematik im Auge gehabt und haben nicht an die Darstellung wirklicher Sachverhalte gedacht.

Diese Logiker dachten: Wenn alle Stricke reißen, wenn sich diese logischen Formen auf die Wirklichkeit nicht anwenden lassen, so bleibt uns doch noch immer die Mathematik. Heute sehen wir, daß es auch mit der Mathematik nichts ist, daß hier keine logischen Sätze vorkommen.

Ein Symbol wie »φx« ist sehr gut, wenn es sich darum handelt, einfache logische Verhältnisse zu erläutern. Dieses Symbol ist hergekommen von dem Fall, daß »φ« ein Prädikat und »x« ein variables Substantiv bezeichnet. Aber sobald man darangeht, die wirklichen Sachverhalte zu betrachten, sieht man, daß diese Symbolik sehr im Nachteil ist gegenüber unserer wirklichen Sprache. Es ist natürlich ganz falsch von *einer* Subjekt-Prädikat Form zu sprechen. In Wirklichkeit gibt es nicht *eine*, sondern sehr zahlreiche. Gäbe es nämlich nur eine, so müßten alle Substantive und alle Adjektive füreinander substituierbar sein. In eine Klasse gehören nämlich alle füreinander substituierbaren Wörter.[14] Aber schon die gewöhnliche Sprache zeigt, daß das nicht der Fall ist. Scheinbar kann ich sagen: »Der Stuhl ist braun« und »Die Oberfläche des Stuhls ist braun«. Ersetze ich aber »braun« durch »schwer«, so kann ich nur noch den ersten Satz aussprechen und nicht den zweiten. Das beweist, daß aber auch das Wort »braun« zwei verschiedene Bedeutungen gehabt hat.

»Rechts« sieht auf den ersten Blick so aus wie andere Adjektive, z. B. »süß«. »Rechts-links« entspricht »süß-bitter«.

Ich kann sagen »mehr rechts« so wie »süßer«.

Aber ich kann nur sagen ». . . liegt rechts von . . . «, aber nicht: ». . . liegt süß von . . . «. Die Syntax ist also wirklich verschieden.[15]

Wenn ich nun nicht bloß einen Satz betrachte, in dem ein bestimmtes Wort vorkommt, son-

12. Ähnliche Ideen werden mehrmals in PhB angedeutet, manchmal als etwas Beseitigtes (z. B. S. 51 u. 84), manchmal mit verschiedengradiger Zustimmung (S. 58 , 88 , 100, 103, 158, 168 u. 267). Zweifellos verweist Wittgenstein hier auf frühere Ms.-Bände, in welchen einige der PhB-Stellen vielleicht zum ersten Mal erschienen sind. (F. H.)

13. Die Texte, auf die sich der Herausgeber in obiger Anmerkung bezieht, finden sich in folgenden Passagen aus dem *Nachlass*: (1) Wittgenstein stellt seine Konzeption einer primäre Sprache in MS 105, S. 114 vor, die dem Anfang 1929 entspricht; Ähnliche Beobachtungen finden sich auch in TS 208, S. 62-63r und in TS 209, S. 28; (2) Ende 1929 ließ Wittgenstein die Idee einer primäre Sprache in MS 107, S. 205 und MS 108, S. 29; diese Beobachtungen sind auch in TS 209, S. 1, 20 aufgeführt. (A. U.)

14. Die Sprache ist schon vollkommen geordnet. Die Schwierigkeit besteht nur darin, die Syntax einfach und übersichtlich zu machen. (W. A.)

15. In süß liegt noch keine Zahl. Ich kann sagen: Der eine Tee ist süßer als der andere. Aber bei dieser Aussage habe ich nicht an Zahlen gedacht. (W. A.)

nômenos.[12][13] Eu falei também de um primeiro sistema e de um segundo sistema. Agora gostaria de comentar por que não mais sustento esta concepção.

Acredito que só temos essencialmente uma linguagem, e esta é a linguagem corrente. Não precisamos mais inventar uma linguagem nova ou construir um simbolismo, senão que a linguagem ordinária já *é a* linguagem, se nós a liberamos das obscuridades que nela se metem.

Nossa linguagem já está completamente em ordem se está claro sobre o que ela simboliza. Linguagens diferentes das ordinárias também são valiosas na medida em que nos mostram o que há de comum entre elas. Para certas finalidades, por exemplo para a apresentação de relações de inferência, um simbolismo artificial é muito útil. De fato, na construção da lógica simbólica, Frege, Peano e Russell sempre só tiveram em vista a aplicação à matemática e não pensaram em estado de coisas reais.

Esses lógicos pensavam: se tudo o mais falhar, se essas formas lógicas não puderem ser aplicadas à realidade, então ainda temos a matemática. Hoje vemos que não há nada também na matemática, que aqui não ocorrem proposições lógicas

Um símbolo como “φx” é muito bom se se trata de elucidar simples relações lógicas. Este símbolo provém do caso de que “φ” é um predicado e “x” designa um substantivo variável. Mas assim que se começa a considerar os estados de coisas reais, vê-se que este simbolismo está em muita desvantagem em comparação à nossa linguagem real. É sem dúvida totalmente falso falar de *uma* forma sujeito-predicado. Na realidade, não há *uma*, mas inumeráveis. Se só houvesse uma, todos os substantivos e todos os adjetivos teriam que ser substituíveis entre si. Todas as palavras substituíveis entre si pertenceriam a uma classe.[14] Mas a linguagem corrente já mostra que este não é o caso. Aparentemente posso dizer: “A cadeira é marrom” e “A superfície da cadeira é marrom”. Mas se trocar “marrom” por “pesada”, então só posso proferir a primeira proposição e não a segunda. Mas isto também comprova que a palavra “marrom” tinha dois significados diferentes.

“Direita” se parece, à primeira vista, com outros adjetivos, por exemplo “doce”. “Direita-esquerda” corresponde a “doce-amargo”.

Posso dizer “mais à direita” assim como “mais doce”.

Mas só posso dizer “... está à direita de ...”, e não: “... está ao doce de ...”. A sintaxe é realmente diferente.[15]

Agora, se eu considerar não meramente uma proposição em que uma determinada palavra ocorre, mas todas as proposições possíveis, então elas especificam completamente a sintaxe da palavra, muito mais completamente do que o símbolo “φx”.

Ora, é estranho que haja algo na nossa linguagem que eu gostaria de comparar com uma

12. Ideias semelhantes são sugeridas várias vezes nas PR, às vezes como algo suprimido (veja-se, por exemplo, pp. 51 e 84), e às vezes com variados graus de concordância (pp. 58 , 88 , 100, 103, 158, 168, e 267). Não há dúvida de que Wittgenstein refere-se aqui a volumes de manuscritos anteriores em que algumas formulações apareceram nas PR pela primeira vez. (N. E.)

13. Os textos a que o editor se refere na nota acima podem ser encontrados nas seguintes passagens do *Nachlass*: (1) Wittgenstein apresenta sua concepção da uma linguagem primária no MS 105, p. 114, o que corresponde ao começo do ano de 1929; observações semelhantes a esta são datilografadas também no TS 208, pp. 62-63r e no TS 209, p. 28; (2) ao final do ano de 1929, Wittgenstein abandona a ideia de uma linguagem primária no MS 107, p. 205 e MS 108, p. 29; estas observações são também reproduzidas no TS 209, pp. 1, 20. (N. T.)

14. A linguagem já está completamente ordenada. A dificuldade só consiste em tornar a sintaxe simples e panoramicamente apresentável. (N. W.)

15. Em doce não há nenhum número. Eu posso dizer: que um chá é mais doce do que o outro. Mas neste enunciado não pensei em números. (N. W.)

dern alle möglichen Sätze, so geben diese die Syntax des Wortes vollständig an, viel vollständiger als das Symbol »φx«.

Nun ist das merkwürdig, daß es in unserer Sprache etwas gibt, das ich einem *leerlaufenden Rad* in einer Maschine vergleichen möchte.[16] Ich werde gleich erklären, was ich damit meine.

Der Sinn des Satzes ist seine Verifikation.

Wenn ich z. B. sage: »Dort oben auf dem Kasten liegt ein Buch«, wie stelle ich das an, um das zu verifizieren? Genügt es, wenn ich es anblicke, oder wenn ich es von verschiedenen Seiten betrachte, oder wenn ich es in die Hand nehme, es befühle, es aufschlage, darin blättere, und so weiter? Hier gibt es zwei Auffassungen. Die eine sagt: Wie immer ich es anfange, ich kann den Satz niemals vollständig verifizieren. Der Satz läßt sich gleichsam immer eine Hintertür offen. Was immer wir machen, wir sind nie sicher, daß wir uns nicht getäuscht haben.

Die andere Auffassung, die ich vertreten möchte, sagt: Nein, wenn ich den Sinn des Satzes nie vollständig verifizieren kann, dann kann ich mit dem Satz auch nichts gemeint haben. Dann heißt der Satz auch gar nichts.

Um den Sinn eines Satzes festzustellen, müßte ich ein ganz bestimmtes Verfahren kennen, wenn der Satz als verifiziert gelten soll. Hierin schwankt die Umgangssprache sehr, viel mehr als die wissenschaftliche Sprache. Es besteht hier eine gewisse Freiheit, und das heißt nichts anderes als: Die Symbole unserer Umgangssprache sind nicht unzweideutig definiert.

[Die Wörter schwanken zwischen verschiedenen Bedeutungen, und deshalb ist es unsicher, wann ein Satz vollständig verifiziert ist. Setzen wir die Bedeutung ein für allemal fest, so haben wir auch ein sicheres Kriterium für die Wahrheit der Aussage gewonnen.]

Manchmal ist die Verifikation sehr schwierig: z. B. »Seitz ist zum Bürgermeister gewählt worden.«[17] Wie soll ich es eigentlich anfangen, diesen Satz zu verifizieren? Besteht die richtige Methode darin, daß ich hingehe und mich erkundige? Oder die Menschen frage, die dabei waren? Der eine hat aber von vorn, der andere von hinten gesehen. Oder soll ich es in der Zeitung lesen?

Was den philosophischen Betrachter an unserer Sprache am meisten befremdet, ist der Unterschied zwischen *Sein und Schein*.

Leerlaufende Räder

Wenn ich mich umdrehe, ist der Ofen weg. (Die Dinge existieren nicht in den Wahrnehmun-

16. Angesichts des Scheiterns des elementaren Satzes im Erkenntnisprozess des Realitätsvergleichs und auch der Unzulänglichkeit der "primäre Sprache" als Ausdruck des Phänomens versucht Wittgenstein, die Mehrdeutigkeiten, Ungenauigkeiten und Multiplizität der Syntaxen der gewöhnlichen Sprache zu erklären, durch die Metapher des „leerlaufenden Rad" als Maschinenmechanismus, der je nach Verwendung oder Anwendung unter bestimmten Bedingungen aktiviert oder nicht aktiviert werden kann. Leerlaufenden Räder dienen in diesem Fall beispielsweise dazu, die Traktion der Maschine zu erhöhen oder zu verringern. In der hier von Wittgenstein vorgeschlagenen Konzeption befinden wir uns auf halbem Weg zwischen dem logischen Atomismus und seiner späteren Grammatik, da das Konzept der „leerlaufende Räder" nur eine logische Voraussetzung dafür ist, wie die Annahme von Substantiven als Hypothesen oder als Verallgemeinerungen in der gewöhnlichen Sprache funktioniert. (A. U.)

17. Karl Seitz war von 1925 bis 1934 sozialistischer Bürgermeister von Wien. (F. H.)

roda-livre numa máquina.[16] Vou explicar o que quero dizer com isto.

O Sentido da Proposição é a sua Verificação.

Se digo, por exemplo: "Há um livro lá em cima do armário", como faço para verificar isto? É suficiente se olho para ele, ou se o observo de lados diferentes, ou se o tomar com as mãos, senti-lo, abri-lo, ou folheá-lo e assim por diante? Aqui há duas concepções. Uma diz: não importa o que comece a fazer, nunca posso verificar completamente a proposição. É como se a proposição sempre deixasse aberta a porta dos fundos. Façamos o que fizermos, nunca estaremos seguros de que não estávamos equivocados.

A outra concepção, que gostaria de defender, diz: não, se eu nunca posso verificar completamente o sentido da proposição, então não posso ter querido dizer nada com ela. Então a proposição também não significa nada.

Para constatar o sentido de uma proposição, eu teria que conhecer um procedimento muito específico para que a proposição pudesse contar como verificada. Aqui a linguagem ordinária oscila muito, muito mais do que a linguagem científica. Existe aqui uma certa liberdade, e isto não dizer outra coisa senão: os símbolos da nossa linguagem ordinária não são definidos inequivocamente.

[As palavras oscilam entre diferentes significados, e, por isto, é incerto se uma proposição é completamente verificada. Se estabelecemos o significado de uma vez por todas, então obtemos também um critério seguro para a verdade do enunciado.]

Às vezes a verificação é muito difícil: por exemplo, "Seitz foi eleito como prefeito."[17] Como devo começar realmente a verificar esta proposição? Consiste o método correto em que eu vá até lá e peça informações? Ou pergunte às pessoas que estavam lá? Um viu pela frente, o outro viu por trás. Ou devo ler sobre isto no jornal?

O que mais causa estranheza ao observador filosófico da nossa linguagem é a diferença entre *ser e parecer*.

Rodas-Livres

Quando me viro, o fogão se foi. (As coisas não existem nos intervalos perceptivos.) Se a "existência" é tomada no sentido empírico (não no metafísico), este enunciado é uma roda-li-

16. Diante do malogro da proposição elementar no processo cognitivo de comparação com a realidade, e também da insuficiência da "linguagem primária" como expressão do fenômeno, Wittgenstein tenta dar conta das ambiguidades, imprecisões e multiplicidade de sintaxes da linguagem ordinária, a única de que dispomos, através da metáfora da "roda-livre". Uma roda-livre é um mecanismo de uma máquina que pode ou não ser acionado, a depender do uso ou da aplicação que dela se faz em certas condições. As rodas livres servem, neste caso, para aumentar ou diminuir a tração da máquina, por exemplo. Na concepção aqui proposta por Wittgenstein, estamos a meio caminho entre o atomismo lógico e a sua concepção posterior de gramática, posto que a concepção de "rodas livres" é apenas um pressuposto lógico de como funciona na linguagem ordinária a assunção dos substantivos como hipóteses, ou como generalizações. (N. T.)

17. Karl Seitz foi um prefeito socialista de Viena, de 1925 a 1934. (N. E.)

gspausen.) Wenn »Existenz« im empirischen Sinn (nicht im metaphysischen) genommen wird, ist diese Aussage ein leerlaufendes Rad. Unsere Sprache ist in Ordnung, sobald wir nur ihre Syntax verstehen und die leerlaufenden Räder erkennen.

»Ich kann mich *nur* erinnern.« Als ob es noch einen anderen Weg gäbe und nicht vielmehr die Erinnerung die *einzige* Quelle wäre, aus der wir schöpfen. Man bezeichnet die Erinnerung als ein Bild.[18] Das Bild kann ich mit dem Original vergleichen, aber nicht die Erinnerung. Die Erlebnisse der Vergangenheit sind ja nicht wie die Gegenstände im Zimmer nebenan: Jetzt sehe ich sie zwar nicht, aber ich kann hinübergehen. Aber kann ich in die Vergangenheit gehen?

⟨*»Ich kann nicht Ihren Schmerz fühlen.«*⟩

Es ist eine Erfahrung, was meinem Willen untersteht, welches die Teile meines Leibes sind. Es ist z. B. Erfahrung, daß ich nie zwei Leiber gehabt habe. Ist es nun auch eine Erfahrung, daß ich nicht Ihren Schmerz fühlen kann? Nein!

»Ich kann nicht in Ihrem Zahn Schmerz fühlen.«

»Ich kann nicht Ihren Zahnschmerz fühlen.«

Der erste Satz hat Sinn. Er drückt eine empirische Erkenntnis aus. Auf die Frage: Wo tut es weh? würde ich auf Ihren Zahn deuten. Wenn man an Ihren Zahn ankommt, zucke ich zusammen. Kurz, es ist *mein* Schmerz und würde selbst dann noch mein Schmerz sein, wenn Sie ebenfalls die Symptome des Schmerzes an dieser Stelle zeigten, also auch zusammenzuckten wie ich, wenn man den Zahn drückt.

Der zweite Satz ist reiner Unsinn. Ein solcher Satz ist durch die Syntax verboten.

Das Wort »ich« gehört zu denjenigen Wörtern, die man aus der Sprache eliminieren kann. Nun ist es sehr wichtig, wenn man mehrere Sprachen hat; man sieht dann, was allen diesen Sprachen gemeinsam ist und dieses Gemeinsame bildet ab.[19]

Man kann nun viele verschiedene Sprachen konstruieren, in welchem jedesmal ein anderer Mensch Mittelpunkt ist. Stellen Sie sich etwa vor, Sie wären ein Despot im Orient. Alle Menschen wären gezwungen, in der Sprache zu sprechen, in welcher Sie Zentrum sind.[20] Wenn ich in dieser Sprache rede, so würde ich sagen: Wittgenstein hat Zahnschmerzen. Aber Waismann benimmt sich so wie Wittgenstein, wenn er Zahnschmerzen hat. In der Sprache, in der Sie Mittelpunkt sind, würde es gerade umgekehrt heißen: Waismann hat Zahnschmerzen, Wittgenstein benimmt sich so wie Waismann, wenn er Zahnschmerzen hat.

Alle diese Sprachen lassen sich ineinander übersetzen. Nur das Gemeinsame spiegelt etwas wieder.

Nun ist das merkwürdig, daß *eine* von diesen ausgezeichnet ist, nämlich diejenige, in der ich sozusagen sagen kann, ich fühle *wirklichen* Schmerz.

Wenn ich »A« bin,[21] dann kann ich wohl sagen: »B benimmt sich so wie A, wenn er Schmerzen fühlt«, und aber auch »A benimmt sich so wie B, wenn er Schmerzen fühlt«. Eine von diesen Sprachen ist ausgezeichnet, nämlich die Sprache, in der ich der Mittelpunkt bin. Die Sonderstellung dieser Sprache liegt in ihrer Anwendung. Sie wird nicht ausgedrückt.

---

18. Vgl. PhB S. 81 f. und unten, S. 29 . (F. H.)
19. Vgl. TLP 5, 512. (F. H.)
20. Vgl. PhB S. 88 f. (F. H.)
21. Wenn A Zahnschmerzen hat, so kann er sagen: Jetzt schmerzt der Zahn, und das ist der Schluß der Verifikation. B aber müßte sagen: A hat Zahnschmerzen, und dieser Satz ist nicht mehr das Ende der Verifikation. Hier ist der Punkt, wo die Sonderstellung der verschiedenen Sprachen deutlich zutage tritt. (A. W.)

vre. Nossa linguagem está em ordem uma vez que compreendemos a sua sintaxe e reconhecemos as rodas-livres.

"Eu *só* consigo me lembrar". Como se ainda houvesse um outro caminho e que a memória não fosse a *única* fonte de que dispomos. Designa-se a memória como uma imagem.[18] Posso comparar a imagem com o original, mas a memória não. As vivências do passado não são como os objetos na sala ao lado: embora não os veja agora, posso ir até lá. Posso, no entanto, ir para o passado?

⟨*"Eu Não Posso Sentir a Sua Dor"*⟩

O que está sob a minha vontade, quais são as partes do meu corpo, são experiências. É, por exemplo, uma experiência que eu nunca tenha tido dois corpos. Mas então é também uma experiência que eu não possa sentir a sua dor? Não!

"Eu não posso sentir dor no seu dente".

"Eu não posso sentir a sua dor de dente".

A primeira proposição tem sentido. Ela expressa um conhecimento empírico. Pela pergunta: onde é que dói? Eu apontaria para o seu dente. Quando se toca no seu dente, eu me contraio. Em síntese, é a *minha* dor e ela ainda seria a minha dor se você, do mesmo modo, mostrasse o sintoma da dor neste local, portanto também se se contraísse como eu se o dente fosse pressionado.

A segunda proposição é puro contrassenso. Uma proposição assim é proibida pela sintaxe.

A palavra "eu" pertence àquelas palavras que se podem eliminar da linguagem. Ora, é muito importante se temos várias linguagens; pode-se então ver o que todas estas linguagens têm em comum e afigurar o que está em comum.[19]

Pode-se então construir muitas linguagens diferentes em que a cada vez uma pessoa diferente é o ponto central. Imagine que você fosse um déspota no Oriente. Todas as pessoas seriam obrigadas a falar na linguagem em que você é o centro.[20] Quando falo nesta linguagem, então devo dizer: Wittgenstein está com dor de dente. Mas Waismann está se comportando como Wittgenstein quando este está com dor de dente. Na linguagem cujo ponto central é você, isto significaria justamente o inverso: Waismann está com dor de dente, Wittgenstein se comporta como Waismann quando este está com dor de dente.

Todas estas linguagens podem ser traduzidas entre si. Só o que é comum reflete alguma coisa.

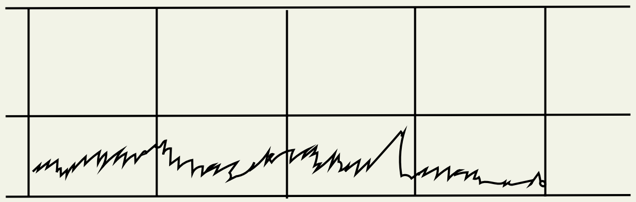
Agora, é estranho que *uma* delas seja proeminente, a saber, aquela em que, por assim dizer, eu possa dizer que *realmente* sinto uma dor.

Se sou "A",[21] então posso dizer: "B se comporta tal como A quando sente dores", mas também "A se comporta tal como B quando sente dores". Uma dessas linguagens é proeminente, a saber, a linguagem em que sou ponto central. A posição privilegiada desta linguagem está na sua aplicação. Ela não é expressa.

---

18. Cf. PR p. 81s., e abaixo p. 30. (N. E.)
19. Cf. TLP 5. 512. (N. E.)
20. Cf. PR p. 88s. (N. E.)
21. Se A está com dor de dente, pode dizer: agora o meu dente está doendo, e esta é a conclusão da verificação. Mas B teria que dizer: A está com dor de dente, e esta proposição não é mais o fim da verificação. Aqui está o ponto em que a posição privilegiada das diferentes linguagens se revela claramente. (N. W.)

⟨SPRACHE UND WELT⟩



Bildstreifen

Tonstreifen

Tonfilm

Ich möchte ein altes Gleichnis gebrauchen: »laterna magica«.
Nicht der *Tonstreifen* begleitet den Film, sondern die *Musik*.
Der Tonstreifen begleitet den Bildstreifen.
Die Musik begleitet den Film.

Bildstreifen	Tonstreifen	Musik		Film
?	?	Sprache	Welt	

Die Sprache begleitet die Welt.[22]

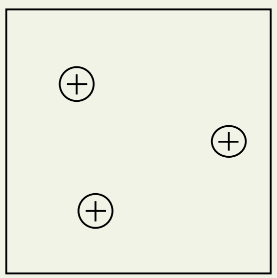
Mittwoch, 25. Dezember (bei Schlick)

»ALLE« II

WAISMANN FRAGT: Wie ist der Satz auszudrücken: »Alle Menschen in diesem Zimmer haben Hosen an«? Etwa so:

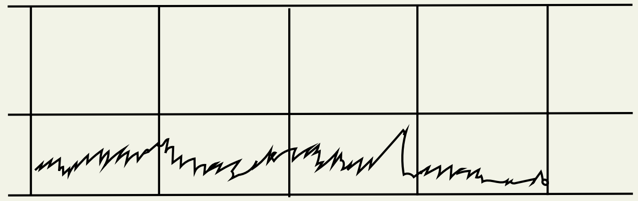
fa . fb . fc . ~fx . (x ≠ a, ≠ b, ≠ c)

WITTGENSTEIN: Nein.
Nehmen wir den Fall: »Alle Kreise in diesem Quadrat haben ein Kreuzel.«



22. Nach dieser Bemerkung sind 2⅔ Seiten freigelassen (F. H.)

⟨LINGUAGEM E MUNDO⟩



Faixa de imagem

Faixa sonora

Filme sonoro

Gostaria de usar uma comparação antiga: “lanterna mágica”.
Não é a *trilha sonora* que acompanha o filme, mas a *música*.
A trilha sonora acompanha a faixa do filme.
A música acompanha o filme.

Faixa da Imagem	Faixa Sonora	Música	Filme	
?	?		Linguagem	Mundo

A linguagem acompanha o mundo.[22]

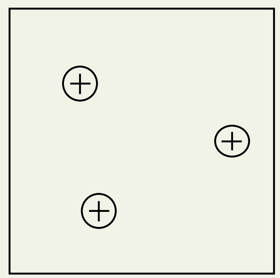
Quarta-feira, 25 de Dezembro (na casa de Schlick)

“TODO” II

WAISMANN PERGUNTA: Como é que a proposição expressa: “Todas as pessoas nesta sala vestem calças”? Talvez assim:

fa . fb . fc . ~fx . (x ≠ a, ≠ b, ≠ c)

WITTGENSTEIN: Não.
Suponhamos o caso: “Todos os círculos neste quadrado têm uma cruzinha”.



22. Após essa observação, 2⅔ de páginas são deixadas em branco. (N. E.)

Die Schwierigkeit, diesen Satz zu formulieren hängt zusammen mit der Namengebung. Mit den Eigennamen ist es eine verfluchte Sache. Z. B., ich wollte den Stuhl Jacob nennen. Wem habe ich eigentlich den Namen gegeben? Der Form oder dem Stuhl? Wenn es mehrere Tausend ganz gleich beschaffene Stühle gäbe, wie wüßte ich, welcher Jacob ist? Habe ich mit Jacob die *Form* des Stuhles benannt, dann kann ich sie nicht voneinander unterscheiden. Habe ich das gemeint, was ich durch Vorzeigen hervorheben kann, so wieder Schwierigkeit: Wenn zwei genau gleich beschaffene Stühle sich gegeneinander bewegten, sich durchdringen würden und dann wieder auseinander gehen – wie könnte ich dann wissen, welcher Jacob ist? Die Möglichkeit die Dinge mit Eigennamen zu belegen, setzt schon sehr komplizierte Erfahrungen voraus. (Undurchdringlichkeit!)

Gehen wir lieber zu den Kreisen! Da entgehen wir der Schwierigkeit mit den Eigennamen. Wir beschreiben die Konturen, d. h. die *Farbengrenzen im Sehfeld*. Eine solche Beschreibung ist immer vollständig, daher wenn ich sage:

so ist das *ein vollständiges Bild* des Sachverhalts. Es ist nicht mehr möglich, nachträglich etwas mit »und« hinzuzufügen. Der Raum ist komplett. Ich kann nur die Beschreibung ändern, aber nichts ihr hinzufügen. Wenn ich das Zimmer beschreibe und angebe, wo die Sessel und der Tisch stehen und was sonst noch vorkommt, dann kann ich nicht nach einer halben Stunde sagen: Und dann ist noch das und das da.

1. *Der Kreis im Quadrat*:
Angabe des Quadrates
Angabe des Mittelpunktes des Kreises
Angabe des Radius des Kreises
} vollständiges Bild

Wir wollen uns jetzt ein allgemeineres Bild des Sachverhaltes machen.
2. *Ein Kreis im Quadrat*: Angabe des Quadrates

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
$0 < x_0 < a$
$0 < y_0 < a$
$r < \min (\langle x_0, y_0, \rangle\; a - x_0, a - y_0)$
} unvollständiges Bild

3. *Drei Kreise im Quadrat*: Ebenso. Angabe von drei Kreisen durch Variablen.
4. *Alle Kreise im Quadrat*: Ich kann von einer solchen Satzform zu einer anderen übergehen. Der nächste Satz entsteht nicht aus dem vorhergegangenen durch »und«, sondern ⟨durch⟩

A dificuldade de formular esta proposição está relacionada com a nomeação. Os nomes próprios são uma coisa maldita. Por exemplo, eu quis chamar a cadeira de Jacob. A quem dei o nome na realidade? À forma ou à cadeira? Se houvesse milhares de cadeiras produzidas identicamente, como saberia qual é a Jacob? Se tivesse nomeado a *forma* da cadeira como Jacob, não poderia distingui-las uma das outras. Se quisesse dizer o que posso realçar pela exibição, então haveria uma nova dificuldade: se duas cadeiras produzidas identicamente se movessem uma contra a outra, se penetrassem e então se separassem novamente – como poderia saber qual é a Jacob? A possibilidade de atestar as coisas com nomes próprios pressupõe experiências muito complicadas. (Impenetrabilidade!)

Vamos então para os círculos! Aqui evitamos a dificuldade com os nomes próprios. Descrevemos os contornos, isto é, os *limites das cores no campo visual*. Uma descrição como esta é sempre completa, daí se digo:

então esta é *uma imagem completa* do estado de coisas. Não é mais possível acrescentar posteriormente algo com “e”. O espaço está completo. Só posso modificar a descrição, mas nada acrescentar a ela. Se descrevo a sala e indico onde estão as poltronas e a mesa e tudo o mais, então não posso dizer depois de meia hora: e então ainda tem isto e aquilo ali.

1. *O círculo no quadrado*:
Especificação do quadrado
Especificação do ponto central do círculo
Especificação do raio do círculo
} Imagem completa

Vamos fazer agora uma imagem mais geral do estado de coisas.
2. *Um círculo no quadrado*: especificação do quadrado

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
$0 < x_0 < a$
$0 < y_0 < a$
$r < \min (\langle x_0, y_0, \rangle\; a - x_0, a - y_0)$
} Imagem incompleta

3. *Três círculos no quadrado*: do mesmo modo. Especificação de três círculos por meio de variáveis.
4. *Todos os círculos no quadrado*: posso passar de uma forma proposicional para outra. A próxima proposição não provém da precedente pelo “e”, mas ⟨por⟩ op⟨erações⟩ sobre a forma pro-

Op⟨erationen⟩ in der Satzform. Ich kann nun die Serie von Sätzen betrachten: 1 Kreis im Quadrat, 2 Kreise im Quadrat, 3 Kreise im Quadrat, .. . n Kreise im Quadrat. *Vollständige Induktion* für diese Reihe von Sätzen.

Das »Alle« ist also das »*Alle*« der Arithmetik, das heißt die vollständige Induktion.

»Alle Kreise im Quadrat sind schwarz.« Ebenso.

ZEIT

Alle Schwierigkeiten der Physik entspringen daraus, daß man Aussagen der Physik mit Regeln der Grammatik vermengt.

»Zeit« hat zwei verschiedene Bedeutungen:

a) Zeit der Erinnerung

b) Zeit der Physik

Wo verschiedene Verifikationen vorliegen, liegen auch verschiedene Bedeutungen vor. Wenn ich eine zeitliche Angabe – z. B. das und das war früher als das und das – nur durch das Gedächtnis verifizieren kann, muß »Zeit« eine andere Bedeutung haben als dort, wo ich eine solche Angabe auch durch andere Mittel verifizieren kann, z. B. dadurch, daß ich ein Dokument nachlese, oder jemanden frage, und so weiter. (Ebenso verhält es sich ja mit der »Vorstellung«. Man nennt gewöhnlich die Vorstellung ein »Bild« des Gegenstandes, so, als ob es neben der Vorstellung noch einen Weg gäbe, zum Gegenstand zu gelangen. Aber die Vorstellung hat eine andere Bedeutung, wenn ich sie als Bild eines Gegenstandes auffasse, den ich noch auf andere Weise verifizieren kann, und wieder eine andere Bedeutung, wenn ich den Gegenstand als logische Konstruktion von Vorstellungen betrachte.)[23]

Ebenso muß man auseinanderhalten die Erinnerung als *Quelle* und die Erinnerung, die man noch auf andere Art verifizieren kann.

Wir sagen: Ich habe nur eine *blasse* Erinnerung. Was heißt hier »*nur*«? Kann ich denn die Erinnerung mit dem Gegenstand vergleichen, so wie ich eine Photographie mit dem Original vergleichen kann? Gibt es denn außer der Erinnerung noch einen andern Weg, um zum Sachverhalt zu kommen?

Gleichnis mit dem Film: Einzelne Bilder von verschiedener Schärfe. Wir können sie nach der Schärfe sortieren. Die Verblaßtheit des Bildes kann ich die »Zeit« *nennen*.

Ist nun die Zeit extern oder intern?

Extern - intern

In der ganzen Frage von extern und intern herrscht eine ungeheure Verwirrung. Das liegt daran, daß ich einen unähnlichen Sachverhalt auf verschiedene Weise beschreiben kann.

Extern ist eine Relation, die sagt »wie?«. Sie wird in einem Satz ausgedrückt.

Intern: Wir haben zwei Sätze, zwischen welchen eine formelle Relation besteht.

Nun scheint es, als könnte ich ähnliche Sachverhalte bald durch einen Satz ausdrücken, bald durch zwei, zwischen welchen eine interne Relation besteht.

Z.B.:

23. Vgl. PhB S. 81f. und oben Ss. 21-23. (F. H.)

posicional. Agora posso considerar a série de proposições: 1 círculo no quadrado, 2 círculos no quadrado, 3 círculos no quadrado, ... n círculos no quadrado. *Indução completa* para esta série de proposições.

Este "todo" é, portanto, o "*todo*" da aritmética, o que significa a indução completa.

"Todos os círculos no quadrado são pretos". Do mesmo modo.

TEMPO

Toda a dificuldade da física decorre de que os seus enunciados se misturam com regras da gramática.

"Tempo" tem dois significados diferentes:

a) Tempo da memória

b) Tempo da física

Onde existem diferentes verificações, também existem diferentes significados. Se eu só puder verificar uma informação temporal pela memória – por exemplo, isto e isto foi anterior a isto e isto – o "tempo" tem que ter um significado diferente do que aquele em que eu possa verificar uma informação como esta por outros meios, por exemplo pela consulta de um documento, ou perguntando a alguém, e assim por diante. (O mesmo acontece com a "representação". Denomina-se normalmente a representação como uma "imagem" do objeto, como se existisse ainda, ao lado da representação, um meio de alcançar o objeto. Mas a representação tem um outro significado se a concebo como imagem de um objeto que eu possa ainda verificar de outro modo, e ainda outro significado quando considero o objeto como construção lógica.)[23]

Do mesmo modo, tem-se que distinguir a memória como fonte e a memória que se pode verificar de outra maneira.

Nós dizemos: eu só tenho uma *pálida* lembrança. O que significa aqui "*só*"? Afinal, posso comparar a lembrança com o objeto, tal como posso comparar uma fotografia com o original? Existe fora da lembrança algum outro caminho para se chegar ao estado de coisas?

Comparação com o filme: imagens individuais de diferente nitidez. Como podemos classificá-las pela nitidez? Posso *chamar* o desvanecimento da imagem de "tempo".

O tempo, então, é externo ou interno?

Externo – interno

Reina uma tremenda confusão na pergunta toda pelo externo e interno. Isto porque eu posso descrever um estado de coisas dissimilar de diferentes modos.

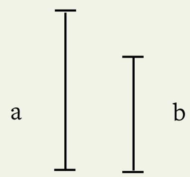
Externa é uma relação que diz "como?". Ela se expressa em uma proposição.

Interna: temos duas proposições entre as quais existe uma relação formal.

Agora parece que poderia expressar estados de coisas semelhantes ora por uma proposição, ora por duas entre as quais existe uma relação interna.

Por exemplo:

23. Cf. PR pp. 81s., e acima pp. 24-26. (N. E.)



Ich kann sagen: a ist 2 m lang, b ist 1,5 m lang. Dann zeigt sich, daß a länger ist als b.

Was ich nicht sagen kann, ist, daß 2 > 1,5. Das ist intern.

Ich kann aber auch sagen: a ist um 0,5 m länger als b.

Dann habe ich offenbar eine externe Relation; denn es wäre ja ebensogut denkbar, daß die Strecke a kürzer wäre als b. Noch deutlicher gesagt: Von diesen zwei bestimmten Strecken ist es freilich nicht denkbar, daß die eine länger oder kürzer ist als die andere. Aber wenn ich z. B. sage, die links gelegene Strecke ist länger als die rechts gelegene, dann teilt mir die Relation »länger als« tatsächlich etwas mit, – sie ist extern. Das hängt offenbar damit zusammen, daß wir jetzt nur ein unvollständiges Bild der Sachlage haben. Beschreiben wir den Sachverhalt vollständig, so verschwindet die externe Relation. Aber wir dürfen nicht glauben, daß dann überhaupt eine Relation übrigbleibt: Abgesehen von der internen Relation zwischen den Formen, die immer besteht, braucht in der Beschreibung überhaupt keine Relation vorzukommen, und das zeigt, daß in Wahrheit die *Relationsform* nichts Wesentliches ist: Sie bildet nicht ab.

Ich kann wohl sagen: Der eine Anzug ist dunkler als der andere. Aber ich kann nicht sagen: Die eine Farbe ist dunkler als die andere. Denn das gehört zum Wesen der Farbe; sie kann ja ohne das nicht gedacht werden.

Die Sache ist immer dieselbe: An der und der Stelle des Raumes ist eine dunklere Farbe als an jener Stelle. Sobald ich den Raum hineinbringe, habe ich externe Relationen; aber zwischen den reinen Farbqualitäten können nur interne Relationen bestehen. Ich habe ja gar kein anderes Mittel, die Farbe zu charakterisieren, als jenes durch ihre Qualität.

Anwendung auf die Zeit: Caesar vor Augustus: extern. Das historische Faktum auch anders denkbar.

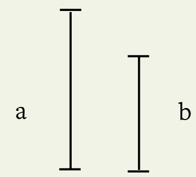
Kann ich aber das Frühere nur durch Erinnerung verifizieren, so ist die Beziehung »früher als« intern.

GESICHTSRAUM

Es ist uns allen klar, daß der Gesichtsraum einen Zusammenhang mit dem euklidischen Raum hat. Aber worin besteht dieser Zusammenhang? Der Gesichtsraum ist nicht der euklidische Raum. Sie entsprechen einander nur. Der euklidische Raum ist das Korrelat des Gesichtsraums. Welcher Art ist diese Entsprechung?[24]

Auffallendes Phänomen: Ich sehe nur die Grenzen im Gesichtsraum, nämlich Grenzen zwischen verschiedenen Farben. Dann aber sehe ich noch etwas ganz anderes, etwa einen Stern mit seiner Farbe. Der Stern ist nicht ausgedehnt, er hat keine Grenzen. Man kann nicht fragen: Ist

24. Hier kommt ein eigentümlicher *Unbestimmtheitsfaktor* vor, der in der euklidischen Geometrie fehlt. Die Geometrie des Gesichtsraumes setzt sich zusammen aus der euklidischen Geometrie, d. h., aus einer gewissen Syntax plus der Syntax dieses Unbestimmtheitsfaktors. (A. W.)



Posso dizer: a tem 2m de extensão e b tem 1,5m de extensão. Mostra-se, então, que a é mais comprido do que b.

O que não posso dizer é que 2 > 1,5. Isto é interno.

Mas eu posso também dizer: a é 0,5m mais comprido do que b.

Então, evidentemente, tenho uma relação externa; pois seria igualmente pensável que o fragmento a fosse mais curto do que o b. Dito mais claramente: é claro que destes dois fragmentos em particular é impensável que um seja mais curto ou mais longo do que o outro. Mas se digo, por exemplo, que o fragmento à esquerda é mais comprido do que o da direita, então a relação “mais comprido do que” me informa alguma coisa – ela é externa. Isto está evidentemente relacionado com o fato de que só temos agora uma imagem incompleta do estado de coisas. Se descrevemos completamente o estado de coisas, desaparece a relação externa. Mas não podemos acreditar em absoluto que resta uma relação: à parte da relação interna que sempre existe entre as formas, nenhuma relação precisa ocorrer na descrição, e isto mostra que, na verdade, a *forma relacional* não é nada essencial: ela não afigura.

Posso, com efeito, dizer: que um terno é mais escuro do que o outro. Mas não posso dizer: que uma cor é mais escura do que outra. Pois isto pertence à essência da cor; ela não pode ser pensada sem isto.

A coisa é sempre a mesma: neste e neste ponto do espaço tem uma cor mais escura do que naquele ponto. Contanto que eu insira o espaço, tenho relações externas; mas entre as puras qualidades de cor só podem existir relações internas. Não tenho nenhum outro meio de caracterizar cores senão pela sua qualidade.

Aplicação sobre o tempo: César antes de Augusto: externa. O fato histórico também pensável de outro modo.

Mas se eu só puder verificar a anterioridade pela memória, então a relação “antes do que” é interna.

ESPAÇO VISUAL

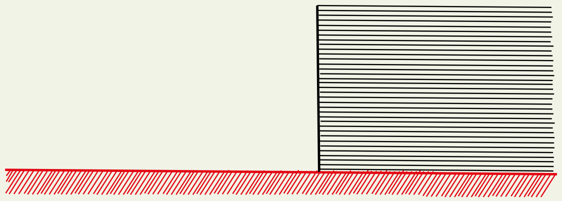
Para todos nós é claro que o espaço visual tem uma conexão com o espaço euclidiano. Mas em que consiste esta conexão? O espaço visual não é euclidiano. Eles só se correspondem um ao outro. O espaço euclidiano é um correlato do espaço visual. De que tipo é esta correspondência?[24]

Fenômeno impresionante: só vejo os limites no espaço visual, a saber, limites entre diferentes cores. Mas então ainda vejo algo totalmente diferente, como uma estrela com a sua cor. A estrela não é estendida, ela não tem limites. Não se pode perguntar: ela é redonda ou quadrada?

24. Aqui ocorre um *fator de indeterminação* peculiar que está faltando na geometria euclidiana. A geometria do espaço visual compõe-se de geometria euclidiana, isto é, de uma certa sintaxe, mais a sintaxe deste fator de indeterminação. (N. W.)

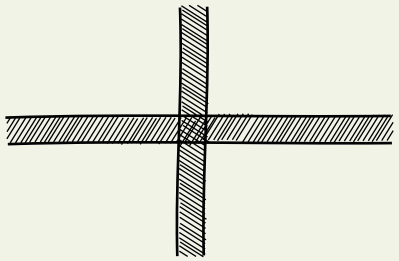
er rund oder viereckig? Er hat keine Kontur. Das deutet vielleicht darauf hin, daß wir hier aus der euklidischen Geometrie hinaustreten.

Eine Linie ist die Grenze zweier Flächen, und ein Punkt ist der Schnitt zweier Linien.

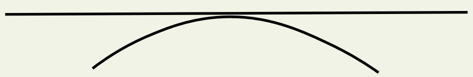


Diese Ecke ist ein Punkt. Ein Stern ist in ganz anderem Sinn ein Punkt.

Wie sehen wir den Schnittpunkt zweier mit Bleistift gezeichneter Geraden? + Etwa als Rechteck? Wir wissen, daß er ein Rechteck ist; aber wir sehen es nicht. Was wir sehen, ist ohne Kontur.



Hjelmslev[25] hat Versuche in dieser Richtung gemacht, aber die eigentliche Bedeutung der Sache nicht verstanden. Vor allem ist er sich nicht ganz klar darüber, wo eigentlich das Problem liegt: in den Eigenschaften der hölzernen Körper, die wir als Lineale zum Zeichnen benutzen etc., oder in den Eigenschaften des Gesichtsraumes?[26] Das erste wäre unwesentlich. Das wäre nur eine uninteressante Beschreibung der Eigenschaften des Holzes. Offenbar ist doch mit unseren Fragen etwas anderes gemeint: Nämlich, wie genau ich auch immer zeichne, ein Kreis und eine Tangente müssen mir immer so *erscheinen*, als ob sie ein Stück miteinander gemeinsam hätten.



Ja, wenn sie in Wirklichkeit gar nichts gemeinsam haben, sondern die Gerade nur so *nahe* am Kreis verläuft, haben wir doch bei einiger Entfernung den Eindruck, als würden sie ein Stück zusammenlaufen. Dieses Phänomen des Gesichtsfeldes ist das Wesentliche und nicht die Eigenschaften der Zeicheninstrumente.

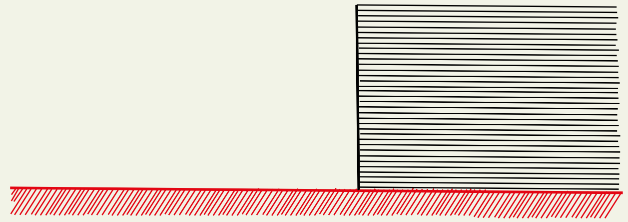
Es handelt sich hier darum, das wiederzugeben, was unsere Sprache mit dem Wort »*ungenau*« beschreibt. Wie würde dieses Wort im Symbolismus wiederzugeben sein und welches

25. J. Hjelmslev in *Abhandlungen aus dem math. Sem. d. Univ. Hamburg*. 2, 1923, S. 1-36, insb. S. 28, und in *Acta Mathematica* 40, 1916, S. 35-66. (F. H.)

26. Hjelmslev hat die Idee, mit einer *groben Geometrie* zu beginnen. Aber gerade das ist der Irrtum: Eine grobe Geometrie wäre genau so Geometrie wie eine feine. (Sie haben dieselbe Multiplizität.) Hjelmslev betrachtet z. B. nicht den Punkt, sondern den *Fleck*. Aber der ausgedehnte Fleck hat bereits eine Kontur, der Punkt nicht. (A. W.)

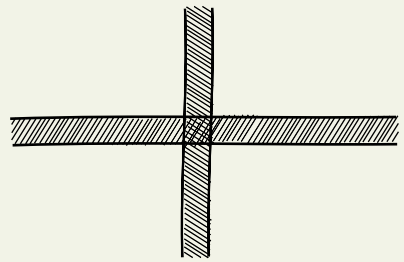
Ela não tem contorno. Isto talvez indique que nós nos encontramos aqui fora da geometria euclidiana.

Uma linha é o limite de duas superfícies, e um ponto é uma secção de duas linhas.

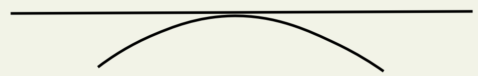


Este vértice é um ponto. Uma estrela é um ponto em sentido totalmente diferente.

Como vemos o ponto de intersecção de duas retas desenhadas a lápis? + Como se fosse um retângulo? Nós sabemos que é um retângulo: mas não o vemos. O que vemos está sem contorno.



Hjelmslev[25] fez pesquisas nesta direção, mas não entendeu o real significado da coisa. Sobretudo, não ficou totalmente claro para ele onde o problema realmente estava: nas propriedades dos corpos de madeira que utilizamos como régua para desenhar etc., ou nas propriedades do espaço visual?[26] A primeira seria irrelevante. Esta seria somente uma descrição desinteressante das propriedades da madeira. Obviamente, quer-se dizer outra coisa com as nossas perguntas: a saber, não importa quão exatamente eu desenhe, um círculo e uma tangente têm sempre que *parecer* como se tivessem entre si um fragmento em comum.



Pois se eles na realidade nada têm em comum, senão que a reta só passa *perto* do círculo, teremos a impressão, a alguma distância, de que eles se convergiriam em um só fragmento. Este fenômeno do campo visual é o essencial e não as propriedades dos instrumentos de desenho.

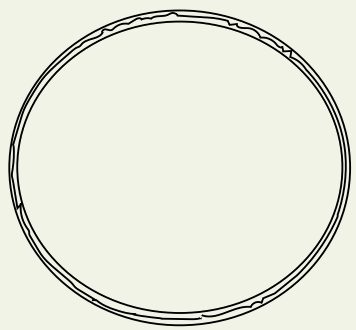
Trata-se aqui de reproduzir o que a nossa linguagem descreve com a palavra "*inexato*". Como esta palavra seria reproduzida no simbolismo e quais seriam as suas regras sintáticas?

25. J. Hjelmslev, in: Abhandlungen aus dem math. Sem. d. Univ. Hamburg. 2, 1923, pp. 1-36, em especial p. 28, e in: Acta Mathematica 40, 1916, pp. 35-66. (N. E.).

26. Hjelmslev tem a ideia de começar com uma geometria rude. Mas justamente este é o erro: uma *geometria rude* seria exatamente tanto uma geometria quanto uma apurada. (Elas têm a mesma multiplicidade.) Hjelmslev considera, por exemplo, não o ponto, mas a *mancha*. Mas a mancha estendida já tem um contorno, o ponto, não. (N. W.).

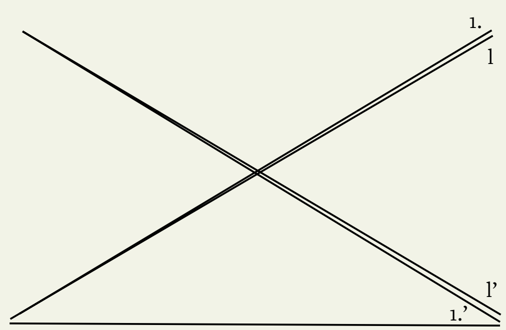
wären seine syntaktischen Regeln?

F. Klein,[27] hat den Gesichtspunkt der Schwelle hineingebracht.[28] Aber so ist die Sache noch nicht korrekt ausgedrückt. Wenn man z.B. sagt: »Alle Figuren, die innerhalb eines bestimmten dünnen Kreisraumes gelegen sind, sehen wir als Kreise«, wird das



dadurch ausgedrückt, daß wir die untere und die obere Grenze, d. h. die beiden Kreise selbst angeben? Nein! Denn dieses Angeben hat nicht die Multiplizität der Erscheinung, die wir beschreiben sollen. Denn die beiden Grenzkreise muß ich doch selbst unterscheiden.

Denken wir uns folgenden Versuch: Wir sollen feststellen, ob zwei gerade Linien parallel sind. Zu diesem Zweck wird eine Gerade in verschiedene Lagen gebracht, und wir können nun, wenn wir eine endliche Anzahl von Versuchen vornehmen, feststellen, welches die letzte Lage war, die wir noch als parallel bezeichnet haben und welches die erste Lage war, welche wir nicht mehr als parallel bezeichnen. Diese beiden Lagen sind voneinander verschieden. Wesentlich ist: Daran kann keine noch so lange Fortsetzung der Versuche etwas ändern.



Bei Vermehrung der Versuchszahl wird der Unterschied der beiden Lagen immer kleiner werden; aber er wird nie gleich Null werden. Nun gibt es hier zwei mögliche Interpretationen:

a) Alle Geraden innerhalb 1 1' sehen wir als Parallele, alle außerhalb 1 1' als Nicht-Parallele.[29]

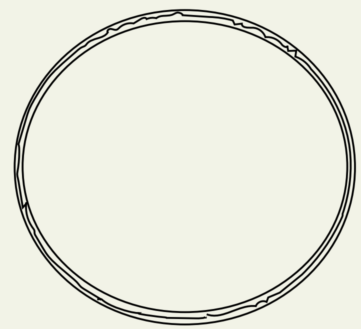
27. *Elementarmathematik von einem höheren Standpunkte* III[3], Berlin 1928, S. 2 ff. (F. H.).

28. Die Schwelle tritt uns etwa entgegen, wenn man sagt, daß wir wohl ein regelmäßiges 4-Eck von einem regelmäßigen 5-Eck unterscheiden können, nicht aber ein regelmäßiges 200- von einem 201-Eck. Es muß also, wenn wir die 4-, 5 -, 6-, . . . Ecke durchmustern, irgendwo eine Stelle geben, von wo ab sie miteinander verfließen. Man kann auch sagen: Wir unterscheiden das eingeschriebene und umgeschriebene Polygon nicht mehr vom Kreis. (A. W.)

29. *Nachtrag, 30. Dezember 1929*

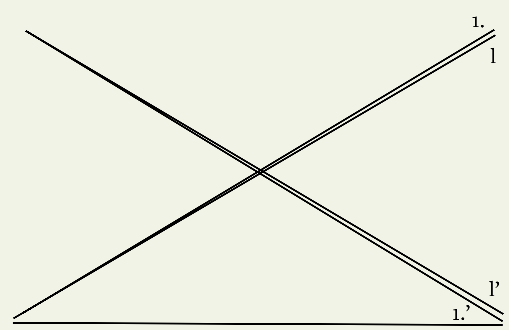
Ich muß meine Darlegung berichtigen: Das Wesentliche dabei ist, daß wir zwei Sprachen gebrauchen, eine Sprache

F. Klein[27] introduziu o ponto de vista do limiar da percepção.[28] Mas as coisas ainda não foram expressas corretamente deste modo. Se se diz, por exemplo: "Vemos como círculo qualquer figura que esteja situada dentro de um determinado espaço circular fino", isto vem a ser expresso pela própria indicação dos limites inferior e superior,



ou seja, dos dois círculos? Não! Pois estas indicações não têm a mesma multiplicidade do fenômeno que devemos descrever. Pois eu mesmo tenho que diferenciar os dois círculos-limite.

Imaginemos o seguinte experimento: devemos estabelecer se duas linhas retas são paralelas. Para este propósito, uma reta é colocada em diferentes posições para que possamos agora, se efetuamos um número finito de tentativas, estabelecer qual foi a última posição que ainda designamos como paralelas, e qual foi a primeira posição que não mais designamos como paralelas. Estas duas posições são diferentes entre si. O essencial é: não importa quanto tempo possamos dar continuidade aos experimentos, nada pode mudar alguma coisa.



Pelo aumento do número de tentativas a diferença das duas posições vai se tornando cada vez menor: mas ela nunca se iguala a zero. Aqui há, portanto, duas interpretações possíveis:

a) Nós vemos todas as retas dentro de l l' como paralelas, e todas fora de l l' como não paralelas.[29]

27. *Elementarmathematik von einem höheren Standpunkte* III[3], Berlim 1928, pp. 2 ss. (N. E.).

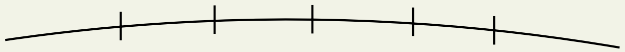
28. Encontramos o limiar da percepção, por exemplo, quando dizemos que se pode distinguir um polígono regular de 4 ângulos de um de 5 ângulos, mas não um polígono regular de 200 de um de 201 ângulos. Se examinamos os polígonos de 4, 5, 6, ... ângulos, tem que, portanto, haver um lugar a partir do qual eles se misturam. Pode-se também dizer: nós não distinguimos mais o polígono inscrito e o circunscrito do círculo. (N. W.)

29. *Adendo, 30 de Dezembro de 1929*

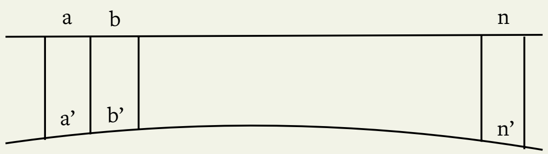
Tenho que retificar minha exposição: o essencial é que estamos usando duas linguagens, uma linguagem do espaço

b) Alle Geraden außerhalb 1. 1.' Sehen wir als Nicht-Paralelle, alle innerhalb 1. 1.' als Parallele.[30]

des Gesichtsraumes und eine Sprache des euklidischen Raumes, wobei wir der Sprache des euklidischen Raumes den Vorzug geben. Die Sprache deutet diesen Unterschied an durch den Gebrauch von »sein« und »scheinen«. Wir sagen etwa: Zwei Strecken im Gesichtsraum *scheinen* gleich, *sind* es aber nicht. Oder: Ein kleiner Kreisbogen *erscheint* gerade, obwohl er krumm ist. Etc.



Darin zeigt sich die nichteuklidische Struktur des Gesichtsraums. Die Wahrheit über den Parallelen-Versuch ist nun:



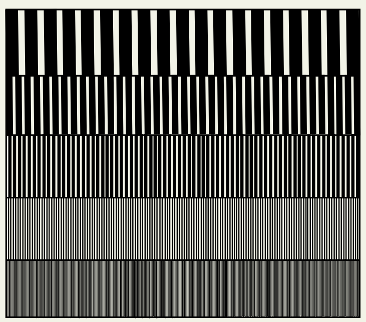
Wir sehen a || a', b || b' . . . n || n'. Wir können daraus nur das eine schließen, daß das Wort »parallel« im Gesichtsfeld etwas anderes bedeutet (eine andere Syntax hat) als im euklidischen Raum. Ebenso die Wörter »gleich«, »gerade«, »gekrümmt«, »Kreis«, »Tangente« und so weiter. Daß Kreis und Tangente im Gesichtsfeld immer ein Stück gemein haben, heißt eben nur, daß der Gesichtskreis und die Gesichtstangente eine andere Syntax haben als die analogen Gebilde im euklidischen Raum. Wir brauchen eine Projektions-Methode, um den Sachverhalt im Sichtfeld in der Sprache der euklidischen Geometrie abzubilden, und die besteht im Gebrauch des Wortes »es scheint«.

Um etwa die Beziehung »die Gleichheit« im Gesichtsraum wiederzugeben, brauchen wir im euklidischen Raum eine damit verwandte (aber nicht identische!) Beziehung, z.B. die folgende:

$a \equiv b$, wenn $b = a + \varepsilon$, $| \varepsilon | < a/100$

»$a \equiv b$, $b \equiv c \rightarrow a \equiv c$« kann gelten oder nicht gelten.

Aus diesem Grund hat die Geometrie des Gesichtsraums eine andere Multiplizität als die Geometrie des euklidischen Raums. Wir dürfen gar nicht »gleich« durch »gleich«, »parallel« durch »parallel«, »gerade« durch »gerade« ersetzen.



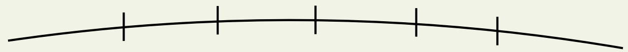
Von einer bestimmten Stelle ab *grau*. Beweist das: Das Gesichtsfeld ist nicht unendlich teilbar? Oder beweist es das nicht? Es beweist das nicht. Es heißt nur: Dem, was in der Geometrie des euklidischen Raumes »geteilt sein« heißt, dem entspricht im Gesichtsraum das Phänomen *grau*. Es kann sein, daß der Teilung im euklidischen Raum eine Teilung im Gesichtsraum entspricht. Es kann aber auch ganz anders sein. Was ich im euklidischen Raum mache, ist an sich gleichgültig. (A. W.)

30. Im Diagramm bedeutet offenbar '1.' »erste« und 'l' »letzte«. (F. H.)

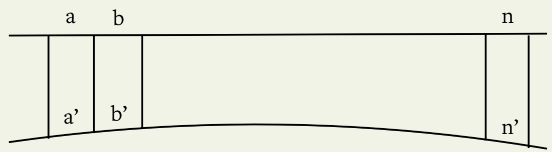
b) Nós vemos todas as retas fora de 1. 1.' como não paralelas, e todas dentro de 1. 1.' como paralelas.[30]

Uma das duas interpretações tem que ser possível. Se não, a classe das paralelas e a classe das

visual e uma linguagem do espaço euclidiano, dando privilégio à linguagem do espaço euclidiano. A linguagem alude a esta diferença pelo uso de "ser" e "parecer". Dizemos, por exemplo: dois segmentos no espaço visual *parecem* iguais, mas não *são*. Ou: um pequeno arco *parece* reto, mesmo que seja curvo. Etc.



Nisto se mostra a estrutura não-euclidiana do espaço visual. A verdade sobre o teste das paralelas é agora:



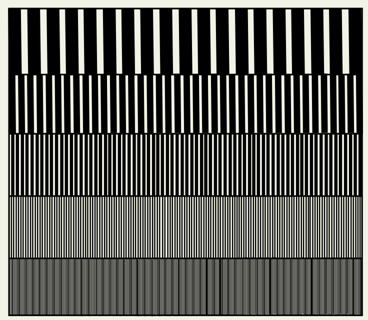
Nós vemos a || a', b || b' ...n || n'. Só podemos concluir dali que a palavra "paralela" significa alguma coisa diferente no campo visual (tem uma outra sintaxe) do que no espaço euclidiano. Bem como as palavras "igual", "reto", "curvo", "círculo", "tangente", e assim por diante. Que círculo e tangente sempre tenham um pedaço em comum no campo visual, só quer mesmo dizer que o círculo e a tangente visuais têm uma sintaxe diferente da configuração análoga no espaço euclidiano. Nós precisamos de um método de projeção para afigurar o estado de coisas do campo de visão na linguagem da geometria euclidiana, o que consiste no uso da expressão "parece".

Para reproduzir, digamos, a relação "igualdade" no espaço visual, precisamos de uma relação que seja aparentada (mas não idêntica!), como, por exemplo, a seguinte:

$a \equiv b$, se $b = a + \varepsilon$, $| \varepsilon | < a/100$

"$a \equiv b$, $b \equiv c \rightarrow a \equiv c$" pode valer ou não.

Por esta razão, a geometria do espaço visual tem uma multiplicidade diferente da geometria do espaço euclidiano. Não podemos substituir "igual" por "igual", "paralela" por "paralela", "reta" por "reta".



Cinza a partir de uma determinada posição. Demonstra que: o campo de visão não é infinitamente divisível? Ou não demonstra isto? Não demonstra. Isto só significa: que o que "está dividido" na geometria do espaço euclidiano significa que o que lhe corresponde no espaço visual é o fenômeno *cinza*. Pode ser que a divisão no espaço euclidiano corresponda a uma divisão no espaço visual. Mas pode ser também totalmente diferente. O que faço no espaço euclidiano é, em si, indiferente. (N. W.)

30. No diagrama, obviamente '1.' significa "primeiro" e 'l', "último". (N. E.)

Eine von diesen beiden Interpretationen muß möglich sein. Sonst würde nämlich die Klasse der Parallelen und die Klasse der Nicht-Parallelen keine Grenze bestimmen, und das würde (Dedekindscher Schnitt)[31] dem Wesen der Stetigkeit zuwiderlaufen. Man kann auch nicht sagen: Es gibt drei Klassen, Parallele, Nicht-Parallele und Zweifelhafte. Denn Geraden der dritten Klasse sehen wir nicht.

Jedenfalls ist klar: Die Erscheinung kann *nicht* dadurch beschrieben werden, daß wir zwei Grenzen angeben wie etwa 1. und l, sondern nur dadurch, daß wir willkürlich eine als Grenze festsetzen. Und das ist das eigentlich Wesentliche bei all diesen Dingen: Soll die Beschreibung die richtige Multiplizität der Erscheinung haben, so darf in ihr nur *eine Grenze* vorkommen.

Das Gesichtsfeld birgt noch oft ungelöste Fragen in sich. Z.B., wie soll man verstehen, daß das Gesichtsfeld aufhört? Das Gesichtsfeld hat offenbar keine Grenzen. Es stößt nirgends an etwas anderes an. Sehen kann man seine Grenzen nicht. Es ist also ohne Grenzen, endlich, und doch keine Kugel. Kann man z. B. etwas sehen, wie es ins Gesichtsfeld eintritt? Nein! Wie könnte der Symbolismus aussehen, der das beschreibt?

GEOMETRIE ALS SYNTAX II

Das eigentliche Verhältnis von Präzisions-Geometrie und Approximations-Geometrie[32] kann man so ausdrücken: Gesetzt, wir hätten bei verschiedenen Ausmessungen von Kreisen verschiedene Werte für das Verhältnis von Umfang und Radius gefunden – würden wir dann sagen, wir hätten die Zahl π in verschiedene Intervalle eingeschlossen? [Würden wir annehmen, wir hätten π dabei im selben Sinne gemessen, wie man eine physikalische Konstante mißt?] Offenbar nicht. Denn wenn alle Intervalle zufälligerweise zu groß wären, würden wir doch nicht annehmen, daß π einen größeren Wert hat, sondern wir würden sagen: Wir haben uns geirrt. Dann ist aber die eigentliche Bedeutung der Zahl ϖ klar: Keine Messung kann uns sagen, welchen Wert π hat oder zwischen welchen Werten sie liegt, sondern die Zahl π ist der *Maßstab*, nach dem wir die Güte der Messung beurteilen.[33] Der Maßstab ist uns schon vor der Messung gegeben; darum kann ich die Messung nicht ändern. Wenn wir also sagen: ϖ hat den und den Wert, z.B. π = 3,14159265 .. . , so kann das nicht bedeuten, daß wir damit etwas über die wirklichen Messungen aussagen wollen, sondern es kann nur heißen: Wir treffen eine Festsetzung darüber, wann wir ein Messungsverfahren als richtig bezeichnen und wann nicht. Die Axiome der Geometrie haben also den Charakter von Festsetzungen über die Sprache, in der wir die räumlichen Gegenstände beschreiben wollen. Sie sind Regeln der Syntax. Die Regeln der Syntax handeln von nichts, sondern wir stellen sie auf.

Wir können das postulieren, was wir selbst tun.

Wir können nur Regeln postulieren, nach welchen wir sprechen wollen. Wir können nicht Sachverhalte postulieren.

Auf den ersten Blick scheint es, als würden uns die Axiome der Geometrie doch etwas mitteilen. Ist z.B. der Satz, daß die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, nicht eine Mitteilung?

31. Dedekind beweist: »Zerfällt das System R aller reellen Zahlen in 2 Classen A1, A2, von der Art, daß jede Zahl α1 der Classe A1 kleiner ist als jede Zahl α2 der Classe A2, so existirt eine und nur eine Zahl α, durch welche diese Zerlegung hervorgebracht wird« (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, 1912, S. 18). Analog behauptet Wittgenstein, daß an jedem Ende des Fächers von Parallellinien es nur eine Linie gibt, die die parallelen von den nichtparallelen trennt. Das muß gewiß stimmen, wenn Dedekinds Bedingung hier gültig ist. (F. H.)

32. Ausdrücke von F. Klein a.a.O. benützt. (F. H.)

33. Wir können die Zahl π nicht messen, weil wir an der Zahl π die Schärfe der Beobachtung bemessen. (A. W.)

não-paralelas não determinariam nenhum limite, o que seria contrário à natureza da continuidade (corte de Dedekind).[31] Tampouco se pode dizer: há três classes, paralelas, não-paralelas e duvidosas. Porquanto não vemos retas da terceira classe.

De todo modo, está claro: o fenômeno *não* pode ser descrito mediante a especificação de dois limites como 1. e l, senão pelo estabelecimento arbitrário de um deles como limite. E isto é realmente o essencial em todas estas coisas: deve haver a descrição da correta multiplicidade do fenômeno, de modo que nele só possa ocorrer *um limite*.

O campo visual ainda engloba muitas vezes perguntas não solucionadas, como, por exemplo, como se deve compreender que o campo visual acabe? Evidentemente o campo visual não tem limites. Ele não vai de encontro com nada. Não se pode ver seus limites. Portanto, ele é ilimitado, finito, e, não obstante, não é uma esfera. Pode-se ver algo, por exemplo, entrando no campo de visão? Não! Com que se pareceria o simbolismo que descreve isto?

GEOMETRIA COMO SINTAXE II

Pode-se expressar a relação real da geometria de precisão com a geometria de aproximação[32] deste modo: suponha que tivéssemos achado, por medidas diferentes de círculos, valores diferentes para a razão entre perímetro e raio – diríamos então que tínhamos incluído o número π em diferentes intervalos? [Assumiríamos que estávamos medindo ϖ no mesmo sentido em que se mede uma constante física?] Obviamente, não. Pois se todos os intervalos por acaso fossem muito grandes, não assumiríamos que π tem um valor maior, mas diríamos: nos equivocamos. Mas, então, o real significado do número π fica claro: nenhuma medida pode nos dizer qual o valor de ϖ ou entre que valores ele fica, mas que o número π é o *padrão* pelo qual julgamos a qualidade da medida.[33] O padrão já nos é dado antes da medida; por isto não posso modificar a medida. Se dizemos, portanto: π tem tal e tal valor, por exemplo, π = 3,14159265 ...., isto não pode significar que queremos declarar com isto alguma coisa sobre a medida real, senão que só pode querer dizer: nós encontramos uma maneira de estipular quando designar um procedimento de medida como correto e quando não. Os axiomas da geometria tem o caráter de estipulações sobre a linguagem na qual queremos descrever os objetos espaciais. Eles são regras da sintaxe. As regras da sintaxe não são sobre nada, nós as configuramos.

Nós só podemos postular o que nós mesmos fazemos.

Nós só podemos postular regras pelas quais queremos falar. Nós não podemos postular estados de coisas.

À primeira vista, parece que os axiomas da geometria nos comunicam alguma coisa. Não é, por exemplo, a proposição de que a soma dos ângulos de um triângulo medem 180° uma comunicação? Ela não pode ser verdadeira ou falsa? Como pode a mera sintaxe nos ensinar alguma coisa assim? Suponhamos que tivéssemos obtido uma medida de 190°. O que diríamos? "Nós

31. Dedekind demonstra: "Se o sistema R decompuser todos os números reais em duas classes A1, A2, de modo que todo número α1 da classe A1 seja menor que todo número α2 da classe A2, então existirá um, e só um, número α pelo qual esta decomposição é produzida" (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, 1912, p. 18). Analogamente, afirma Wittgenstein que em cada extremidade do leque de linhas paralelas existe apenas uma linha que separa a paralela da não-paralela. Isso tem que ser verdadeiro se a condição de Dedekind for válida aqui. (N. E.)

32. Expressões de F. Klein, op. cit. (N. E.)

33. Não podemos medir o número π porque medimos o rigor da observação pelo número π.

Kann sie nicht wahr oder falsch sein? Wie kann uns die bloße Syntax etwas Derartiges lehren? Angenommen, wir hätten einer Messung 190° herausbekommen. Was würden wir sagen? »Wir haben einen Fehler begangen.« Der Satz, die Winkelsumme im Dreieck hat 180°, hat also nur den Wert, fehlerhafte von fehlerfreien Methoden der Winkelmessung zu unterscheiden. Nie kann er uns über den Sachverhalt etwas sagen. Und das zeigt wieder, daß wir es in der Geometrie nie mit der Wirklichkeit, sondern mit den Möglichkeiten im Raum zu tun haben.

Die Entdeckungen über den Raum sind Entdeckungen über das, was im Raum ist.

In der Mathematik gibt es kein Noch.

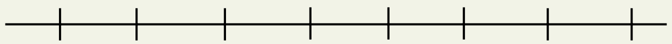
In der Mathematik kann man ebensowenig etwas entdecken wie in der Grammatik.

Syntax für die Gesamtheit ist Geometrie plus Physik.

PHYSIK UND PHÄNOMENOLOGIE

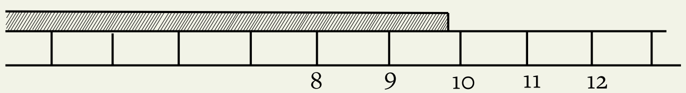
Die Physik will Regelmäßigkeiten feststellen; sie geht nicht auf das, was möglich ist.

Darum gibt die Physik, auch wenn sie vollständig entwickelt ist, keine Beschreibung der Struktur der phänomenologischen Sachverhalte. In der Phänomenologie handelt es sich immer um die Möglichkeit, d. h. um den Sinn, nicht um Wahrheit und Falschheit. Die Physik hebt gleichsam aus dem Kontinuum gewisse Stellen heraus und verwendet diese zu einer gesetzmäßigen Reihe. Um das andere kümmert sie sich nicht.



FARBENSYSTEM

Ich habe einmal geschrieben: »Der Satz ist wie ein Maßstab an die Wirklichkeit angelegt. Nur die äußersten Teilpunkte berühren den zu messenden Gegenstand.«[34] Ich möchte jetzt lieber sagen: Ein *Satzsystem* ist wie ein Maßstab an die Wirklichkeit angelegt. Ich meine damit folgendes: Wenn ich einen Maßstab an einen räumlichen Gegenstand anlege, so lege ich *alle Teilstriche* zu gleicher Zeit an.



Nicht die einzelnen Teilstriche werden angelegt, sondern die ganze Skala. Weiß ich, daß der Gegenstand bis zum Teilstrich 10 reicht, so weiß ich auch unmittelbar, daß er nicht bis zum Teilstrich 11, 12 und so weiter reicht. Die Aussagen, welche mir die Länge eines Gegenstandes beschreiben, bilden ein System, ein Satzsystem. Ein solches ganzes Satzsystem nun wird mit der Wirklichkeit verglichen, nicht ein einzelner Satz. Wenn ich z.B. sage: Der und der Punkt im Gesichtsfeld ist *blau*, so weiß ich nicht nur das, sondern auch, daß der Punkt nicht grün, nicht rot, nicht gelb usw. ist. Ich habe die ganze *Farbenskala* auf einmal angelegt. Das ist auch der Grund dafür, warum ein Punkt zu gleicher Zeit nicht verschiedene Farben haben kann. Denn wenn ich ein Satz*system* an die Wirklichkeit anlege, so ist damit – genau wie beim räumlichen – schon gesagt, daß immer nur *ein* Sachverhalt bestehen kann, nie mehrere.

34. TLP 2,1512 – 2,15121. Der erste Satz hat da »Es« (d. h., »das Bild«) als Subjekt; der zweite Satz beginnt mit »Nur die äußersten Punkte der Teilstriche *berühren* ...«. (F. H.)

cometemos um erro”. A proposição de que a soma dos ângulos de um triângulo tem 180° só tem, portanto, o valor de distinguir métodos de medição de ângulos defeituosos dos que são precisos. Ela não pode nunca dizer-nos alguma coisa sobre o estado de coisas. E isto mostra novamente que nós nunca temos a ver em geometria com a realidade, mas com as possibilidades do espaço.

As descobertas sobre o espaço são descobertas sobre o que está no espaço.

Na matemática não há um ainda.

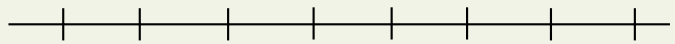
Na matemática pode-se descobrir alguma coisa tão pouco quanto na gramática.

Sintaxe para a totalidade é geometria mais física.

FÍSICA E FENOMENOLOGIA

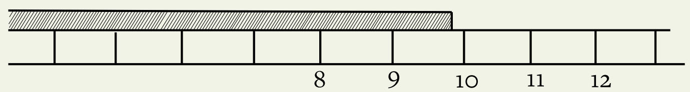
A física quer estabelecer regularidades; ela não vai atrás do que é possível.

Por isto, mesmo que esteja plenamente desenvolvida, a física não dá nenhuma descrição da estrutura do estado de coisas fenomenológico. Na fenomenologia, trata-se sempre da possibilidade, isto é, do sentido, não de verdade e falsidade. A física retira, por assim dizer, certas posições do contínuo e as aplica em uma série em conformidade com leis. Ela não se importa com o restante.



SISTEMA DE CORES

Eu escrevi uma vez: “A proposição é como uma régua aposta à realidade. Apenas os pontos divisórios mais externos tocam o objeto a ser medido.”[34] Eu preferiria dizer agora: um *sistema de proposições* é como uma régua aposta à realidade. Com isto quero dizer o seguinte: se aponho uma régua a um objeto espacial, então aponho *todas as marcas da régua* ao mesmo tempo.



Não são apostas marcas de régua individuais, mas toda a escala. Se sei que o objeto vai até a marca da régua 10, então também sei imediatamente que ele não vai até a marca 11, 12, e assim por diante. Os enunciados que me descrevem a extensão de um objeto, afiguram um sistema, um sistema de proposições. Todo um sistema de proposições assim é agora comparado com a realidade, não uma proposição em separado. Se digo, por exemplo, tal e tal ponto no campo visual é *azul*, então eu não somente sei isto, mas também que o ponto não é verde, não é vermelho, não é amarelo etc. Eu coloquei toda a *escala de cores* de uma vez. Esta é também a razão pela qual um ponto não pode ter diferentes cores ao mesmo tempo. Pois se coloco um *sistema* de proposições na realidade, então já digo assim – exatamente como no caso espacial – que sempre só pode existir *um* estado de coisas, não vários.

Eu ainda não sabia tudo isto na composição do meu trabalho, e pensava então que toda de-

34. TLP 2,1512 – 2.15121. A primeira proposição tem “ela” (isto é, “a figuração”) como sujeito; a segunda proposição começa com “Apenas os pontos mais externos das marcas da régua *tocam* ...”. (N. E.)

Ich habe all das bei der Abfassung meiner Arbeit noch nicht gewußt und meinte damals, daß alles Schließen auf der Form der Tautologie beruhe. Ich hatte damals noch nicht gesehen, daß ein Schluß auch die Form haben kann: Ein Mensch ist 2 m groß, also ist er nicht 3 m groß. Das hängt damit zusammen, daß ich glaubte, die Elementarsätze müßten unabhängig sein; aus dem Bestehen eines Sachverhaltes könne man nicht auf das Nicht-Bestehen eines andern schließen.[35] Wenn aber meine jetzige Auffassung mit dem Satzsystem richtig ist, ist es sogar die Regel, daß man aus dem Bestehen eines Sachverhaltes auf das Nicht-Bestehen aller übrigen schließen kann, die durch das Satzsystem beschrieben werden.

Liegt jeder Satz in einem System? I

PROF. SCHLICK wirft die Frage auf, woher ich den *wissen* könne, daß die eine Syntax richtig sei, die andere nicht. Kann man nicht etwas tiefer begründen, warum »fx« nur für einen Wert von »x« wahr sein kann? Woher wissen wir das? Wie verhält sich die empirische Erkenntnis zur Syntax?

WITTGENSTEIN erwidert, es gibt eine Erfahrung des *daß*, und eine Erfahrung des *wie*.

SCHLICK: Wie verhält es sich z.B. mit dem sogenannten *Relativitätsgesetz* der Psychologie (Hamilton),[36] daß wir nur durch den Kontrast zum Bewußtsein einer Empfindung kommen? Wir hören die Harmonie der Sphären nicht, weil wir sie eben ununterbrochen hören.

WITTGENSTEIN: Hier müssen wir wieder trennen. Was heißt es, wir *hören* die Harmonie der Sphären? Ist damit etwas gemeint, das man auch auf andere Weise als durch Hören verifizieren kann, so hat der Satz keine phänomenologische, sondern eine andere, etwa eine physikalische Bedeutung (Luftschwingung). Meint man aber damit etwas, was man nur durch Hören verifizieren kann, so sagt man: Wir sollten etwas hören, aber wir hören es nicht – und dieser Satz kann nun auf keine Weise verifiziert werden und hat also keinen Sinn. Leerlaufendes Rad.[37]

⟨Die Welt ist rot I⟩

SCHLICK: Sie sagen, daß die Farben ein System bilden. Ist damit etwas Logisches oder etwas Empirisches gemeint? Wie wäre es z. B., wenn jemand sein Leben lang in einem roten Zimmer eingeschlossen wäre und nur rot sehen könnte? Oder wenn jemand überhaupt nur ein gleichmäßiges Rot im ganzen Gesichtsfeld hätte? Könnte er sich dann sagen: Ich sehe nur rot; aber es muß doch auch andere Farben geben?

WITTGENSTEIN: Wenn jemand nie aus seinem Zimmer herauskommt, so weiß er doch, daß

35. TLP 2,062, 4,211, 5,134 – 5,135. (F. H.)

36. Eigentlich muß A. Bain gemeint sein. Als Beispiel seines grundsätzlichen Relativitätsgesetzes (in *The Senses and the Intellect*,[2] London, 1864) führt er an: 'If we had never been affected by any colour except red, colour would never have been recognized by us.' (Vgl. unten.) Hamiltons Relativitätsgesetz hat einen ganz anderen, hier nicht passenden Sinn. (F. H.)

37. Vgl. oben, S. 21 u. 23. (F. H.)

dução repousava sobre a forma da tautologia. Ainda não havia visto que uma conclusão pode ter também a forma: um homem tem 2 m de altura, portanto ele não tem 3 m de altura. Isto está ligado ao fato de que acreditava que as proposições elementares tinham que ser independentes; da existência de um estado de coisas não se pode concluir sobre a não-existência de um outro.[35] Mas se a minha concepção atual do sistema de proposições estiver correta, ela é a regra pela qual se pode concluir da existência de um estado de coisas até mesmo sobre a não-existência de todos os restantes que são descritos pelo sistema de proposições.

Toda Proposição está em um Sistema? I

PROF. SCHLICK levanta a questão sobre como posso *saber* se uma sintaxe está correta e a outra não. Não se pode fundamentar com algo mais profundo por que "fx" só pode ser verdadeiro para um valor de "x"? Como sei disso? Como se relaciona o conhecimento empírico com a sintaxe?

WITTGENSTEIN responde que há uma experiência de *que* e uma experiência do *como*.

SCHLICK: que relação isto tem, por exemplo, com a chamada *lei da relatividade* da psicologia (Hamilton),[36] de que nós só chegamos a ter consciência de uma sensação pelo contraste? Nós não ouvimos a harmonia das esferas porque justamente a ouvimos ininterruptamente.

WITTGENSTEIN: aqui temos que discriminar novamente. O que quer dizer que nós *ouvimos* a harmonia das esferas? Se com isto se quer dizer que se pode verificar também de modo diferente do que pela audição, então a proposição não tem nenhum significado fenomenológico, senão um outro, talvez um físico (vibração do ar). Mas se com isto se quer dizer que só se pode verificar pela audição, então se diz: nós deveríamos ouvir alguma coisa, mas não ouvimos – e esta proposição não pode ser verificada de nenhum modo e não tem, portanto, nenhum sentido. Roda-livre.[37]

⟨O Mundo é Vermelho I⟩

SCHLICK: o senhor diz que as cores formam um sistema. Com isto o senhor quer dizer algo lógico ou algo empírico? Como seria se, por exemplo, se alguém estivesse trancado durante toda a sua vida num quarto vermelho e só pudesse ver vermelho? Ou se alguém só tivesse, em absoluto, um vermelho uniforme em todo o campo visual? Ele poderia, então, dizer: eu só vejo vermelho; mas tem que haver outras cores também?

WITTGENSTEIN: se alguém nunca saiu do seu quarto, então sabe que o espaço continua,

35. TLP 2,062, 4,211, 5,134 – 5,135. (N. E.)

36. Na realidade, A. Bein teria que ser o referido. Como exemplo da sua lei da relatividade fundamental (em *The Senses and the Intellect*,[2] London, 1864), ele menciona: 'If we had never been affected by any colour except red, colour would never have been recognized by us.' (Cf. abaixo). A lei da relatividade de Hamilton tem um sentido totalmente diferente, aqui não compatível. (N. E.)

37. Cf. acima, pp. 22 e 24. (N. E.)

der Raum weitergeht, d. h., daß die Möglichkeit besteht, aus dem Zimmer herauszukommen (und wenn es auch diamantene Wände hätte). Das also ist keine Erfahrung. Es ist in der Syntax des Raumes gelegen, a priori.

Hat nun die Frage einen Sinn: Wie viele Farben muß jemand erlebt haben, um das *System* der Farben zu kennen? Nein ! (Nebenbei: Eine Farbe denken, heißt nicht: die Farbe halluzinieren.) Hier bestehen zwei Möglichkeiten:

a) Entweder ist seine Syntax dieselbe wie unsere: rot, röter, hellrot, gelbrot usw. Dann hat er unser ganzes Farbensystem.

b) Oder seine Syntax ist nicht dieselbe. Dann kennt er überhaupt nicht eine Farbe in unserem Sinn. Denn wenn ein Zeichen dieselbe Bedeutung hat, muß es auch dieselbe Syntax haben.[38]

Nicht auf die Menge der gesehenen Farben kommt es an, sondern auf die Syntax. (So wie es nicht auf die »Menge Raum« ankommt.)

ANTI-HUSSERL

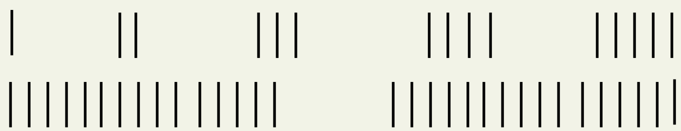
SCHLICK: Was kann man einem Philosophen erwidern, der meint, daß die Aussagen der Phänomenologie synthetische Urteile a priori sind?

WITTGENSTEIN: Wenn ich sage: »Ich habe keine Magenschmerzen«, so setzt das bereits die Möglichkeit eines Zustandes der Magenschmerzen voraus. Mein jetziger Zustand und der Zustand der Magenschmerzen liegen gleichsam im selben logischen Raum. (So wie wenn ich sage: Ich habe kein Geld. Diese Aussage setzt bereits die Möglichkeit voraus, daß ich ja Geld habe. Sie zeigt auf den Nullpunkt des Geldraumes.) Der negative Satz setzt den positiven voraus und umgekehrt.

Nehmen wir nun die Aussage: »Ein Gegenstand ist nicht rot und grün zugleich.«[39] Will ich damit bloß sagen, ich habe bisher einen solchen Gegenstand nicht gesehen? Offenbar nicht. Ich meine: »Ich *kann* einen solchen Gegenstand nicht sehen«, »Rot und grün *können* nicht im selben Ort sein«. Hier würde ich nun fragen: Was bedeutet hier das Wort »kann«? Das Wort »kann« ist offenbar ein grammatischer (logischer) Begriff, nicht ein sachlicher.

38. *Nachtrag, Montag, 30. Dezember 1929*

Ich habe unrecht gehabt, als ich die Sache so dargestellt habe. Man kann weder etwas sagen im Fall, daß ein Mensch nur ein Rot kennt, noch im Fall, daß er verschiedene Rotnuancen kennt. Ich will ein einfaches Gegenbeispiel geben, das sehr alt ist: Wie steht es mit der Zahl der Striche, die ich *sehe*? Ich könnte auch schließen: Wenn ich 1, 2, 3, 4, 5 Striche sehe und die gesehenen Striche dieselbe Syntax haben wie die gezählten, dann muß ich beliebig viele Striche *sehen* können. Aber das ist nicht der Fall.



Ich kann wohl *sehend* 2 von 3 Strichen unterscheiden, aber nicht 100 von 101 Strichen. Es gibt hier zwei verschiedene Verifikationen, die eine Verifikation, indem ich sehe, die andere, indem ich zähle. Das eine System hat eine andere Mu!tiplizität als das andere. Das Sehsystem lautet: *1, 2, 3, 4, 5, viele.* (A. W.)

39. In seiner *Algemeinen Erkenntnislehre*,[2] Berlin, 1925, zitiert Schlick hierzu E. Husserl, *Logische Untersuchungen* II, 2, ([3] Halle, 1922), S. 203. (F. H.)

isto é, que existe a possibilidade de sair do quarto (e de que ele também tivesse paredes de diamante). Portanto, isto não é uma experiência. Isso está assentado aprioristicamente na sintaxe do espaço.

Agora, tem sentido a pergunta: quantas cores alguém tem que ter vivenciado para conhecer o *sistema* de cores? Não! (Aliás: pensar numa cor não quer dizer: alucinar a cor.) Aqui existem duas possibilidades:

a) Ou a sua sintaxe é a mesma que a nossa: vermelho, mais vermelho, vermelho claro, vermelho amarelado, e assim por diante. Então ele tem todo o nosso sistema de cores.

b) Ou a sua sintaxe não é a mesma. Então ele não conhece, em absoluto, uma cor no nosso sentido. Pois se um sinal tem o mesmo significado, ele tem também que ter a mesma sintaxe.[38]

Isto não depende da quantidade de cores vista, mas da sintaxe. (Assim como não depende da "quantidade de espaço".)

ANTI-HUSSERL

SCHLICK: como se pode replicar a um filósofo que quer dizer que os enunciados da fenomenologia são juízos sintéticos a priori?

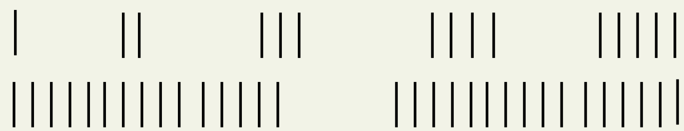
WITTGENSTEIN: se digo: "Eu não estou com dor de estômago", isto já pressupõe a possibilidade de uma condição de dor de estômago. Minha condição atual e a condição de dor de estômago estão de algum modo no mesmo espaço lógico. (Assim como quando digo: não tenho dinheiro. Este enunciado já pressupõe a possibilidade de que tenha dinheiro. Ele aponta para o ponto zero do espaço do dinheiro.) A proposição negativa pressupõe a positiva, e vice-versa.

Tomemos agora o enunciado: "Um objeto não é vermelho e verde ao mesmo tempo".[39] Quero com isto meramente dizer que não vi até agora um objeto assim? Evidentemente, não. Quero dizer: "Eu não *posso* ver um objeto assim", "Vermelho e verde não *podem* estar no mesmo lugar". Aqui eu perguntaria agora: o que significa aqui a palavra "pode"? A palavra "pode" é evidentemente um conceito gramatical (lógico), não factual.

Suponha agora que o enunciado: "Um objeto não pode ser vermelho e verde" fosse um juízo

38. *Adendo, Segunda-Feira, 30 de Dezembro de 1929*

Eu estava errado quando apresentei a coisa dessa maneira. Não se pode dizer nada no caso de que uma pessoa só conhece um vermelho, nem no caso de que ela conheça diferentes nuances de vermelho. Quero dar um contra-exemplo simples que é muito antigo: que se pode dizer do número de traços que *vejo*? Eu poderia também concluir: se vejo 1, 2, 3, 4, 5 traços, e os traços vistos têm a mesma sintaxe que os contados, então tenho que poder *ver* tantos traços quantos quiser. Mas não é este o caso.



Posso bem diferenciar, *vendo*, 2 de 3 traços, mas não 100 de 101 traços. Existem aqui duas verificações diferentes, uma em que vejo, e a outra, em que conto. Um sistema tem uma multiplicidade diferente do outro. O sistema visual diz: *1, 2, 3, 4, 5, muitos*. (N. W.)

39. Na sua *Algemeinen Erkenntnislehre*, 2ed., Berlin, 1925. Schilick cita, neste caso, a *Logische Untersuchungen* II, 2, (3ed. Halle, 1922), p. 203, de E. Husserl. (N. E.)

Gesetzt nun, die Aussage: »Ein Gegenstand kann nicht rot und grün sein« wäre ein synthetisches Urteil und die Worte »kann nicht« bedeuten die logische Unmöglichkeit. Da nun ein Satz die Negation seiner Negation ist, muß es auch den Satz geben: »Ein Gegenstand kann rot und grün sein.« Dieser Satz wäre ebenfalls synthetisch. Als synthetischer Satz hat er Sinn, und das bedeutet, die von ihm dargestellte Sachlage *kann bestehen*. Bedeutet also »kann nicht« die *logische* Unmöglichkeit, so kommen wir zu der Konsequenz, daß das Unmögliche doch möglich ist.

Hier blieb Busserl nur der Ausweg, daß er erklärt, es gäbe noch eine dritte Möglichkeit. Darauf würde ich erwidern: Worte kann man ja erfinden; aber ich kann mir darunter nichts denken.

Montag, 30. Dezember 1929 (*bei Schlick*)

ZU HEIDEGGER

Ich kann mir wohl denken, was Heidegger mit Sein und Angst meint.[40] Der Mensch hat den Trieb, gegen die Grenzen der Sprache anzurennen. Denken Sie z. B. an das Erstaunen, daß etwas existiert. Das Erstaunen kann nicht in Form einer Frage ausgedrückt werden, und es gibt auch gar keine Antwort. Alles, was wir sagen mögen, kann a priori nur Unsinn sein. Trotzdem rennen wir gegen die Grenze der Sprache an.[41][42] Dieses Anrennen hat auch Kierkegaard gesehen und es sogar ganz ähnlich (als Anrennen gegen das Paradoxon) bezeichnet.[43] Dieses Anrennen gegen die Grenze der Sprache ist die *Ethik*. Ich halte es für sicher wichtig, daß man all dem Geschwätz über Ethik – ob es eine Erkenntnis gebe, ob es Werte gebe, ob sich das Gute definieren lasse etc. – ein Ende macht. In der Ethik macht man immer den Versuch, etwas zu sagen, was das Wesen der Sache nicht betrifft und nie betreffen kann. Es ist a priori gewiß: Was immer man für eine Definition zum Guten geben mag – es ist immer nur ein Mißverständnis, das Eigentliche, was man in Wirklichkeit meint, entspreche sich im Ausdruck (Moore).[44]Aber die Tendenz, das Anrennen, *deutet auf etwas hin*. Das hat schon der heilige Augustin gewußt, wenn er sagt:[45] Was, du Mistviech, du willst keinen Unsinn reden? Rede nur einen Unsinn, es macht nichts!

DEDEKINDSCHE DEFINITION

40. M. Heidegger, »Sein und Zeit« in *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, VIII, 1927, S. 186-187 »*Das Wovor der Angst ist das In-der-Welt-Sein als solches*. Wie unterscheidet sich phänomenal das, wovor die Angst sich ängstigt, von dem, wovor die Furcht sich fürchtet? Das Wovor der Angst ist kein innerweltliches Seiendes .... *Das Wovor der Angst ist die Welt als solche*.« (F. H.)

41. Das Mystische ist das Gefühl der Welt als begrenztes Ganzes.17a »Mir kann nichts geschehen«, d. h.: Was immer geschehen kann, es ist für mich ohne Bedeutung. (A. W.)

42. Vgl. TLP 6,45; Vgl. LE, S. 8. (F. H.)

43. Vgl. z. B. S. Kierkegaard, *Philosophische Brocken*, Kap. III (Werke Bd. VI, Jena, 1925, S. 36 u. 41): »Was ist nun aber dieses Unbekannte, gegen das der Verstand in seiner paradoxen Leidenschaft anstößt ...? Es ist das Unbekannte. ... Es ist die Grenze, zu der man beständig kommt. « (F. H.)

44. Die Kurzschrift in diesem Satz ist besonders schwer zu lesen, obwohl der allgemeine Sinn nicht in Zweifel steht. Ein Wort (»reinen« »int⟨rinsischen⟩«?) ist vollständig unleserlich bevor »Guten«. »das Eigentliche« kann natürlich »daß eigentlich« sein. Der Hinweis bezieht sich zweifellos auf Moores Diskussion über die Undefinierbarkeit der Güte in den *Principia Ethica*, Cambridge, 1903, §§ 5- 14. (F. H.)

45. Waismann fügte das Zitat scheinbar später hinzu. Ich konnte keine solche Stelle in St. Augustinus finden. Es erinnert ein wenig an *Confess*. I. iv »et vae tacentibus de te, quoniam loquaces muti sunt.« (Für diesen Hinweis danke ich P. R. L. Brown). (F. H.)

sintético, e as palavras “não pode” significassem a impossibilidade lógica. Como uma proposição é a negação da sua negação, tem que haver também a proposição: “Um objeto pode ser vermelho e verde”. Esta proposição seria, do mesmo modo, sintética. Como proposição sintética, ela tem sentido, e isto significa que as circunstâncias por ela apresentadas *podem existir*. Se “não pode” significa, portanto, a impossibilidade *lógica*, então chegamos à consequência de que o impossível é possível.

Aqui só restaria a Husserl a saída de explicar que haveria ainda uma terceira possibilidade. À qual eu replicaria: pode-se inventar palavras; mas não posso pensar em associação com isto.

Segunda-Feira, 30 de Dezembro de 1929 (*na casa de Schlick*)

SOBRE HEIDEGGER

Posso muito bem imaginar o que Heidegger quer dizer com ser e angústia.[40] O homem tem o impulso de se bater contra os limites da linguagem. Imagine, por exemplo, o assombro de que algo exista. O assombro não pode ser expresso na forma de uma pergunta, e não há tampouco nenhuma resposta. Tudo o que seríamos capazes de dizer, só pode ser contrassenso a priori. Apesar disto, nos batemos contra os limites da linguagem.[41][42] Este ir contra algo Kierkegaard também viu, e até designou de modo totalmente similar (como bater contra o paradoxo).[43] Este bater contra os limites da linguagem é o ético. Eu certamente tomo como importante que demos fim a todo o falatório sobre ética – se há um conhecimento, se existem valores, se o bem pode ser definido etc. Na ética sempre se faz a tentativa de dizer algo que não concerne à essência da coisa e nunca pode concernir. É a priori certo: o que quer que se possa dar como definição do bem – só é sempre uma má-compreensão, o real que na verdade se quer dizer corresponde à expressão (Moore).[44] Mas a tendência de bater contra *indica alguma coisa*. Isto Santo Agostinho já sabia quando disse:[45] que você, seu porcaria, não queira falar nenhuma bobagem? Fale só uma bobagem, não importa!

DEFINIÇÃO DE DEDEKIND

40. M. Heideger, “Sein und Zeit”, in *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, VIII, 1927, pp. 186-187, “O *do-que da angústia é o estar-no-mundo como tal*. Como se diferencia fenomenalmente o do-que a angústia se angustia do do-que o medo tem medo? O do-que da angústia não é um ente intramundano. ...*o do-que da angústia é o mundo como tal*.” (N. E.)

41. O místico é o sentimento do mundo como totalidade limitada.17a “Nada pode acontecer comigo”, isto é: o que quer que possa acontecer, para mim é sem significado. (N. W.)

42. Cf. TLP 6,45; Cf. LE, p. 8. (N. E.)

43. Cf., por exemplo, S. Kierkegaard, *Philosophische Brocken*, Cap. III (Werke Vol. VI, Jena, 1925, pp.. 36 e 41): “Mas o que é esse desconhecido contra o qual a compreensão se choca na sua paixão paradoxal ...? É o desconhecido. ...É o limite ao qual se chega constantemente.” (N. E.)

44. A abreviação nesta sentença é particularmente difícil de ler, embora não haja dúvida sobre o sentido geral. Uma palavra (“pura” “int⟨rínseco⟩”?) é completamente ilegível antes de “bem”. “O real” pode, naturalmente, ser “que realmente”. A indicação refere-se, sem dúvida, à discussão de Moore sobre a indefinibilidade do bem no *Principia Ethica*, Cambridge, 1903, §§ 5- 14. (N. E.)

45. Waismann aparentemente acrescentou a citação mais tarde. Eu não consegui encontrar essa passagem em Santo Agostinho. Ela lembra um pouco as *Confissões* I. iv “et vae tacentibus de te, quoniam loquaces muti sunt”. (Agradeço por esta indicação a P. R. L. Brown). (N. E.)

Der Fehler, den Russell macht,[46] ist dieser: Er glaubt, er kann eine logische Form beschreiben, und zwar in einer unvollständigen Art.

Wenn man eine logische Form beschreibt, so muß man alles beschreiben. Nichts darf unvollständig bleiben. Ich kann wohl einen Menschen beschreiben, daß ich sage, welche Farbe seine Augen haben. Ich meine damit: Ich sage einstweilen nichts; es wird sich schon finden. Wir lassen gleichsam die Dinge an uns herankommen und beschreiben sie immer genauer. In dieser Weise kann eine logische Form nicht erst beiläufig und ungenau und dann immer genauer beschrieben werden. Z.B.: Ich beschreibe eine Klasse. Ich sage noch nicht, ist sie endlich oder unendlich. Hinterher bemerke ich, es gibt noch den Unterschied, den ich nicht erwartet habe: endlich und unendlich. Ich vervollständige also meine Beschreibung einer Klasse, indem ich sage: »Eine Klasse ist endlich, wenn etc.« Das sieht so aus, als hätte ich zuerst ein Substantiv (Klasse), dem ich nachträglich ein Adjektiv (endlich, unendlich) hinzufügen kann. So wie wenn ich von Schuhen rede und dann sage, daß sie weiß oder grün sind. Aber in Wahrheit *kann* ich ja gar nicht das Substantiv ohne das Adjektiv oder das Adjektiv ohne das Substantiv beschreiben. Beide sind untrennbar. Eine unendliche Klasse ist von vornhinein etwas ganz anderes als eine endliche Klasse. Das Wort »Klasse« hat im einen und im andern Fall einen verschiedenen Sinn; denn die Verifikation der Aussagen ist verschieden.

»*Es gibt unendlich viele Fixsterne*.« Was heißt das? Denken wir uns folgenden Fall: Ich beschreibe eine Pendelbewegung und könnte nun die Bewegung um so genauer erklären, je mehr Fixsterne ich annähme. Sagen wir etwa: Wenn ich einen Fixstern annehme, habe ich einen Fehler 1, wenn ich zwei Fixsterne annehme, einen Fehler ½, 3 Fixsterne einen Fehler ¼, ... n Fixsterne einen Fehler $1/2^{n-1}$. (Insgesamt beträgt die beobachtete Größe 2.) Dann habe ich das Recht anzunehmen: Es gibt unendlich viele Fixsterne. Aber auch hier ist das »unendlich« nur ein Mittel der Darstellung. Es heißt ja nichts anderes als: Ich habe eine unbegrenzt[47] fortsetzbare Folge von Beschreibungen, von denen eine immer genauer ist als die andere. Auch hier ist das »unendlich« das Adverb zu einer Möglichkeit, nämlich zu der Möglichkeit des Übergangs zu einer genaueren Beschreibung.[48]

Oder stellen wir uns folgenden Fall vor: Ich sehe zeitlebens ein Band weiß-rot, weiß-rot, an mir vorbeiziehen, und alle meine Vorfahren haben schon dieses Band gesehen. Dann kann ich das ebenfalls beschreiben durch die Annahme: Es gibt ein unendlich langes Band, das an mir vorbeizieht.

Aber jetzt kommen wir auf etwas sehr Merkwürdiges: Ich möchte nämlich behaupten, die Worte weiß-rot haben hier einen andern Sinn, als wenn ich gewöhnlich von weiß-rot im Sichtfeld spreche. Im Gesichtsfeld besteht nämlich keine Möglichkeit, von unendlich vielen weißen und roten Flecken zu sprechen. Beim Band besteht aber eine solche Möglichkeit. Wenn die Syntax verschieden ist, muß auch die Bedeutung verschieden sein. Ich möchte behaupten (so

46. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, 1923, S. 17: »Ein System S heißt *unendlich*, wenn es einem echten Theile seiner selbst ähnlich ist; im entgegengesetzten Falle heißt S ein *endliches* System«. Whitehead u. Russell benützen diese Definition in den *Principia Mathematica* II, Cambridge, 1912, S. 190 u. 278 ff. als die Definition einer »reflexiven Klasse«. (F. H.)

47. Es ist unklar, was nach dem Präfix »un-« kommt. » Unbegrenzt« ist kurzschriftlich möglich, obwohl es von Waismann für gewöhnlich nicht auf diese Art geschrieben wird; »unendlich« ist unmöglich. (F. H.)

48. Wenn ich z.B. von »allen Sätzen« spreche, z.B. (p) ... , so kann das zweierlei bedeuten:

1. Ich gebe die Form der Sätze p an, z.B. alle Sätze von der Form xRy.

2. Ich verstehe unter allen Sätzen auch die Sätze von der Form xRy ∨ uRv. Dann muß ich das Gesetz kennen, nach dem diese Sätze konstruiert sind. Ich muß wissen, wie ich zu diesen Sätzen komme. (A. W.)

O erro que Russell comete[46] é este: ele acredita que pode descrever uma forma lógica, nomeadamente de uma maneira incompleta.

Quando se descreve uma forma lógica, tem-se que descrever tudo. Nada pode ficar incompleto. Posso descrever uma pessoa dizendo que cor têm os seus olhos. O que quero dizer com isto: por ora não disse nada; as coisas ainda vão aparecer. Deixamos as coisas virem até nós, por assim dizer, e as descrevemos de forma cada vez mais precisa. Deste modo, uma forma lógica não pode ser descrita primeiro de maneira casual e imprecisa para depois ser descrita de maneira cada vez mais precisa. Descrevo uma classe, por exemplo. Ainda não disse se ela é finita ou infinita. Depois me dou conta de que existe uma diferença que eu não esperava: finita ou infinita. Portanto, concluo minha descrição de uma classe dizendo: "Uma classe é finita se etc." Parece que primeiro tenho um substantivo (classe), ao qual posteriormente posso acrescentar um adjetivo (finita, infinita). Como se falasse sobre sapatos e então dissesse que são brancos ou verdes. Mas na verdade não posso descrever o substantivo sem o adjetivo ou o adjetivo sem o substantivo. Ambos são inseparáveis. Uma classe infinita é, desde o início, totalmente diferente de uma classe finita. A palavra "classe" tem sentidos diferentes em um e no outro caso; pois a verificação dos enunciados é diferente.

"*Há um número infinito de estrelas fixas*". O que significa isto? Imaginemos o seguinte caso: descrevo um movimento pendular e agora, quanto mais estrelas fixas eu suponha, poderia explicar o movimento de maneira mais precisa. Digamos, por exemplo: se suponho uma estrela fixa, tenho um erro 1, se suponho duas estrelas fixas, tenho um erro ½, 3 estrelas fixas, um erro ¼, ... n estrelas fixas, um erro $1/2^{n-1}$. (Em geral, a magnitude observada é 2). Então tenho o direito de assumir: há um número infinito de estrelas fixas. Mas também aqui "infinito" é só um meio de apresentação. Significa nada mais que: tenho uma sequência ilimitadamente[47] continuável de descrições, cada uma delas é cada vez mais precisa que a outra. Aqui também o "infinito" é o advérbio para uma possibilidade, ou seja, para a possibilidade de transição para uma descrição mais precisa.[48]

Ou imaginemos o seguinte caso: durante toda a minha vida vejo uma faixa branco-vermelho, branco-vermelho, passando por mim, e todos os meus ancestrais já viram esta faixa. Então também posso descrever isto pela suposição: há uma faixa infinitamente longa que passa por mim.

Mas agora chegamos a algo muito estranho: eu gostaria de afirmar que as palavras branco-vermelho têm um sentido diferente aqui do que quando costumo falar de branco-vermelho no campo de visão. No campo visual não há possibilidade de falar de um número infinito de manchas brancas e vermelhas. Mas esta possibilidade existe com a faixa. Se a sintaxe for diferente, o significado também tem que ser diferente. Eu gostaria de afirmar (por mais estranho que pareça): branco e vermelho significam aqui conceitos da geometria. (Isto é provavelmente o que Einstein quis dizer quando viu a geometria como um ramo da física).[49]

46. R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, 1923, p. 17: "Um sistema S se chama *infinito* se for similar a uma parte genuína de si mesmo; caso contrário, S se chama de sistema *finito*". Whitehead e Russell utilizam esta definição no *Principia Mathematica* II, Cambridge, 1912, p. 190 e 278ss como definição de uma "classe reflexiva". (N. E.)

47 Não está claro o que se segue depois do prefixo "un-". Pode ser uma abreviatura possível para "unbegrenzt", mesmo que Waismann não escreva normalmente desta forma; "unendlich" é impossível. (N. E.)

48. Se falo, por exemplo, de "Todas as proposições", por exemplo, (p) ... , então isto pode significar duas coisas:

1. Eu especifico a forma das proposições p, por exemplo, todas as proposições da forma xRy.

2. Eu compreendo sob todas as proposições também as proposições da forma xRy ∨ uRv. Então tenho que conhecer a lei de acordo com a qual estas proposições foram construídas. Tenho que saber como cheguei a estas proposições. (N. W.)

49. Veja a continuação da passagem citada acima, na p. 10. (N. E.)

seltsam es klingt): Weiß und Rot bedeuten hier Begriffe der Geometrie. (Das hat wohl Einstein gemeint, als er die Geometrie als einen Zweig der Physik auffaßte.)[49]

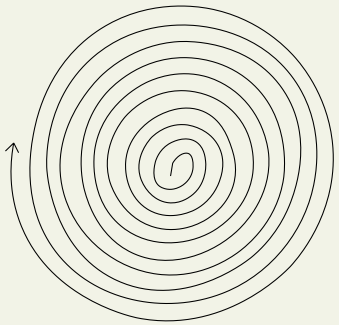
REELLE ZAHLEN I

π = 3,14159265 . .

Die Extension einer solchen Zahl kann nur eine Induktion sein.

Eine Frage, ob in π die Ziffern 0, 1, 2, ... 9 vorkommen, kann keine Frage sein. Ich kann nur fragen, ob sie an einer bestimmten Stelle vorkommen, oder ob sie unter den ersten 10 000 Ziffern vorkommen. Die Aussage: »Sie kommt vor« kann durch keine noch so weitgehende Entwicklung widerlegt - also auch nicht verifiziert werden. Was verifiziert wird, ist eine ganz andere Behauptung, nämlich daß die Sequenz an *der und der Stelle* vorkommt. Man kann daher eine solche Aussage nicht bejahen und nicht verneinen, also auch nicht den Satz vom ausgeschlossenen Dritten auf sie anwenden.

Die Induktion gleicht einer Spirale. Kenne ich die erste Windung, so kenne ich die *ganze* Spirale. Die ganze? Wie denn? Hier liegt eine Ähnlichkeit vor, die leicht dazu verführt, von »ganz« zu sprechen. Wenn ich nämlich eine Windung kenne, so kenne ich nicht die ganze Spirale, wohl aber das Gesetz der Spirale, also auch die ersten zehn Windungen. In diesem letzten Fall hat es



einen guten Sinn zu sagen: Ich kenne eine Windung, also kenne ich die ganze (endliche!) Spirale. Ganz ebenso verhält es sich mit der Entwicklung einer Dezimalzahl. Was ich kenne, ist die Induktion, also das Gesetz der Entwicklung. Ich kann nun auch hier das Verhältnis einer kürzeren und einer längeren Entwicklung betrachten.

Ich konstruiere einen Dezimalbruch nach folgender Vorschrift: Ich schreibe an der n^{ten} Stelle 0, wenn ich beim Probieren für die ersten 100 Zahlen für x, y, z keinen Wert für n gefunden habe, welcher der Fermatschen Gleichung ($x^n + y^n$ ‘= z^n) entspricht; ich schreibe 1, wenn ich ein solches n gefunden habe. Die Dezimalzahl fängt also so an:

0,110000 .....

Vergleichen wir sie mit der Zahl 0,11! Ist sie größer oder gleich dieser? Ich meine nun: Der eben konstruierte Dezimalbruch ist eben keine reelle Zahl, und zwar deshalb nicht, weil er mit den rationalen Zahlen nicht vergleichbar ist. Das Entscheidende bei der Bildung der reellen Zahlen besteht ja gerade in ihrer Vergleichbarkeit. Nur dadurch können die reellen Zahlen als Punkte auf einer Geraden gedeutet werden.

Gibt es nun Gebilde, die sich mit den rationalen Zahlen nicht mehr vergleichen lassen, so

49. Siehe die Fortsetzung der oben, S. 9, zitierten Stellen. (F. H.)

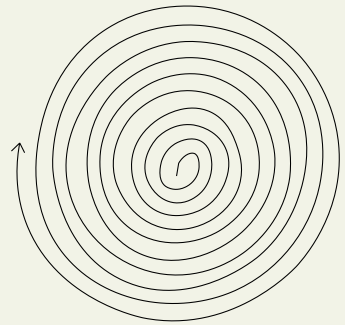
NÚMEROS REAIS I

π = 3,14159265 . .

A extensão deste súmero só pode ser uma indução.

A questão de saber se as cifras 0, 1, 2, ... 9 aparecem em π não pode ser uma questão. Só posso perguntar se elas ocorrem em uma determinada posição, ou se ocorrem nos primeiros 10.000 dígitos. O enunciado: “Ela ocorre” não pode ser refutado por nenhuma expansão, por mais abrangente que seja - isto é, não pode ser verificada. O que se verifica é uma afirmação completamente diferente, a saber, que a sequência ocorre em *tal e tal ponto*. Não se pode, portanto, afirmar ou negar tal enunciado e, portanto, também não se pode aplicar o princípio do terceiro excluído a ele.

A indução é análoga a uma espiral. Se conheço a primeira curva, conheço *toda* a espiral. O todo? Por quê? Há uma semelhança aqui que facilmente nos leva a falar de “todo”. Se conheço uma curva, não conheço toda a espiral, mas conheço a lei da espiral, incluindo as dez primeiras curvas. Neste último caso, faz



um bom sentido dizer: eu conheço uma curva, então eu conheço toda a espiral (finita!). É exatamente o mesmo com a expansão de um número decimal. O que eu conheço é a indução, portanto a lei da expansão. Aqui também posso considerar agora a relação entre uma expansão mais curta e uma mais longa.

Construo uma fração decimal de acordo com a seguinte prescrição: escrevo 0 na enésima posição se, ao tentar com os primeiros 100 números para x, y, z, não encontrei um valor para n para que corresponda à equação de Fermat ($x^n + y^n = z^n$); Escrevo 1 quando encontro este n. Portanto, o número decimal começa assim:

0,110000 ....

Vamos comparar com o número 0,11! É maior ou igual a isto? Quero dizer agora: a fração decimal recém-construída não é um número real, e não porque não pode ser comparada com os números racionais. O fator decisivo na formação dos números reais é sua comparabilidade. Só então os números reais podem ser interpretados como pontos em uma linha reta.

Se há estruturas que não podem mais ser comparadas com os números racionais, não temos o direito de classificá-las como números racionais. Eles não estão nem nas linhas numéricas. (Com Brouwer, parece que estes seriam números reais, dos quais simplesmente não *saberíamos* haben wir kein Recht, sie zu den rationalen Zahlen einzuordnen. Sie liegen dann eben gar nicht auf den Zahlenlinien. (Bei Brouwer sieht es so aus, daß das wohl reelle Zahlen sind, von welchen wir bloß nicht *wissen*, ob sie größer oder kleiner oder gleich einer andern rationalen Zahl sind.)[50]

Es besteht eine Analogie zwischen dem Verhältnis einer Spiralwindung zu 10 Windungen und dem Verhältnis zwischen einer Windung und der ganzen Spirale. Aber das ist nur eine Analogie, und dies hat dazu verführt, unendliche Klassen oder Mengen einzuführen.

Donnerstag, 2. Januar 1930 (bei Schlick)

⟨ELEMENTARSÄTZE⟩

Ich möchte meine Auffassungen von den Elementarsätzen erklären und möchte zuerst sagen, was ich früher geglaubt habe und was mir jetzt davon richtig scheint.

Ich hatte früher zwei Vorstellungen vom Elementarsatz, von welchen mir die eine richtig zu sein scheint, wogegen ich mich in der zweiten vollkommen geirrt habe. Meine erste Annahme war die, daß wir bei der Analyse der Sätze schließlich auf Sätze kommen müssen, die eine unmittelbare Verbindung von Gegenständen sind, ohne Zuhilfenahme logischer Konstanten, denn »nicht«, »und«, »oder« und »wenn« verbinden die Gegenstände sind.[51] Daran halte ich auch jetzt fest. Zweitens hatte ich die Vorstellung, daß die Elementarsätze unabhängig voneinander sein müßten.[52] Die vollständige Weltbeschreibung wäre gleichsam ein Produkt von Elementarsätzen, die teils positiv, teils negativ sind.[53] Hierin habe ich mich geirrt, und zwar ist folgendes daran falsch:

Ich hatte Regeln für den syntaktischen Gebrauch der logischen Konstanten aufgestellt, zum Beispiel »p . q«, und hatte nicht daran gedacht, daß diese Regeln etwas zu tun haben könnten mit der inneren Struktur der Sätze. Falsch war an meiner Auffassung, daß ich glaubte, daß sich die Syntax der logischen Konstanten aufstellen lasse, ohne auf den inneren Zusammenhang der Sätze zu achten. So verhält es sich nicht. Ich kann z.B. nicht sagen: An einem und demselben Punkt ist rot und blau zugleich. Hier ist das logische Produkt unvollziehbar. Die Regeln für die logischen Konstanten bilden vielmehr nur einen Teil einer umfassenden Syntax, von der ich damals noch nichts wußte.

Ein gutes Beispiel dafür ist die Beschreibung einer Fläche, z. B. dieses Papierblattes hier. (Ich möchte gleich erwähnen, daß das kein bloßes Gleichnis ist, sondern daß es sich überall wirklich so verhält wie in diesem Beispiel.) Es wird eine Satzform geben, welche die Verteilung der Farben auf diesem Papierblatt beschreibt, und zwar will ich annehmen, daß es scharfe Farbgrenzen ohne kontinuierliche Übergänge gibt. Was wir beschreiben, sind dann die Farbgrenzen. Das geschieht etwa durch Gleichungen der analytischen Geometrie. Ferner müssen wir die Farben

---

50. Wahrscheinlich ein Hinweis auf Brouwers Vorlesung »Mathematik, Wissenschaft und Sprache«, die, als sie in Wien im März 1928 gehalten worden war, Wittgenstein sehr angeregt hatte (s. G. Pitcher, *The Philosophy of Wittgenstein*, Englewood Cliffs N. J., 1964, S. 8). Die Vorlesung wurde in *Monatshefte für Mathematik und Physik* 36, 1929, S. 153-164, gedruckt. Auf S. 163, z. B., definiert Brouwer eine Pendelzahl »die nicht rational ist, trotzdem ihre Irrationalität absurd ist, und nicht mit Null vergleichbar, obwohl ihre Unvergleichbarkeit mit Null absurd ist«. (F. H.)

51. Da ist sicher irgendetwas falsch mit dem letzten Satzteil. Vielleicht schrieb Waismann irrtümlich »sind« statt »nicht«. Keine der normalen Kurzschriftmöglichkeiten (»deren« für »denn«, »verbindende« für »verbinden die«) scheinen im geringsten zu helfen. (F. H.)

52. Siehe die Anm. auf S. 43 oben. (F. H.)

53. Vermutlich ist hier »ein Produkt von Elementarsätzen und Verneinungen von Elementarsätzen« gemeint. (F. H.)

se são maiores, menores ou iguais a outro número racional.)[50]

Existe uma analogia entre a proporção de uma volta em espiral para 10 voltas, e a relação entre uma volta e a espiral inteira. Mas isto é apenas uma analogia, e isto levou à introdução de classes ou conjuntos infinitos.

Quinta-feira, 2 de Janeiro de 1930 (na casa de Schlick)

⟨PROPOSIÇÕES ELEMENTARES⟩

Gostaria de explicar minhas concepções sobre as proposições elementares e, em primeiro lugar, gostaria de dizer o que antes acreditava e o que agora me parece correto.

Eu costumava ter duas idéias sobre a proposição elementar, uma das quais me parece correta, ao passo que estava completamente errado quanto à segunda. Minha primeira suposição foi que ao analisar as proposições finalmente temos que chegar a proposições que são uma conexão imediata de objetos, sem o auxílio de constantes lógicas, porque "não", "e", "ou" e "se" não conectam os objetos.[51] Eu mantenho isto até agora. Em segundo lugar, tive a ideia de que as proposições elementares tinham que ser independentes umas das outras.[52] A descrição completa do mundo seria, por assim dizer, um produto de proposições elementares, algumas das quais positivas, outras negativas.[53] Aqui eu estava errado, e especificamente no seguinte:

Eu havia estabelecido regras para o uso sintático das constantes lógicas, por exemplo »p . q«, e não pensei que estas regras pudessem ter algo a ver com a estrutura interna das proposições. O que estava errado com a minha concepção era que eu acreditava que a sintaxe das constantes lógicas poderia ser estabelecida sem prestar atenção ao contexto interno das proposições. Não é assim. Não posso dizer, por exemplo: em um mesmo ponto há vermelho e azul simultaneamente. Aqui o produto lógico é inviável. Em vez disto, as regras para as constantes lógicas são apenas parte de uma sintaxe abrangente que eu não conhecia na época.

Um bom exemplo disto é a descrição de uma área, por exemplo esta folha de papel aqui. (Eu gostaria logo de mencionar que isto não é uma mera comparação, mas que em todos os lugares ocorre realmente o mesmo que neste exemplo.) Haverá uma forma proposicional que descreve a distribuição das cores nesta folha de papel, especificamente quero presumir que existem limites nítidos de cores sem transições contínuas. O que estamos descrevendo então são os limites das cores. Isto será feito, digamos, por meio de equações da geometria analítica. Além disto,

---

50. Provavelmente uma referência à conferência de Brouwer intitulada »Mathematik, Wissenschaft und Sprache«, que, quando realizada em Viena em março de 1928, deu a Wittgenstein um grande estímulo (ver G. Pitcher, *The Philosophy of Wittgenstein*, Englewood Cliffs N. J., 1964, p. 8). A palestra foi impressa nos *Monatshefte für Mathematik und Physik* 36, 1929, pp. 153-164. Na página 163, por exemplo, Brouwer define um número pendular "que não é racional, embora sua irracionalidade seja absurda, e não comparável com o zero, embora sua incomparabilidade com o zero seja absurda". (N. E.)

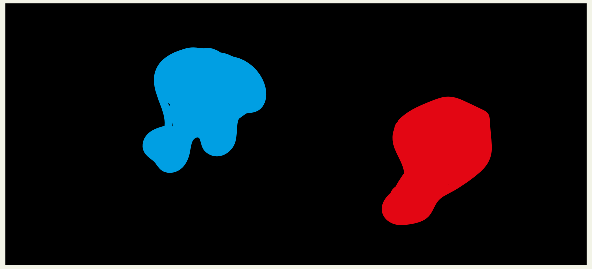
51. Certamente há algo errado com a última parte da frase. Talvez Waismann tenha escrito erroneamente "sind" em vez de "nicht". Nenhuma das opções normais de taquigrafia ("deren" para "denn", "verbindende" para "verbinden die") parece ajudar em nada. (N. E.)

52. Ver a nota de rodapé acima, na p. 44 (N. E.)

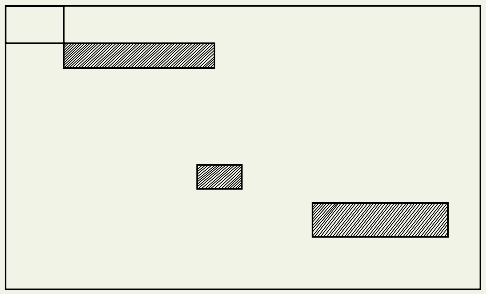
53. Supostamente aqui se quer dizer "um produto de proposições elementares e negação de proposições elementares" (N. E.)

beschreiben. Das geschieht durch irgendein System der Farbbeschreibung, etwa durch Indices. (Wir können uns verschiedene solche Systeme ausdenken.)

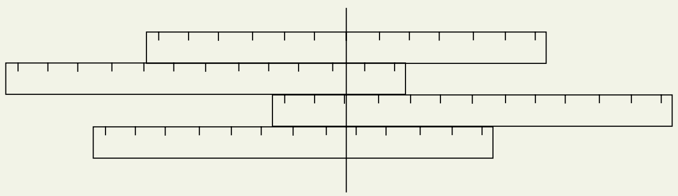
Die Beschreibung wird also enthalten: Gleichungen von Linien und Farbindices. Diese Bestandteile der Beschreibung sind notwendig, d. h. jede mögliche Beschreibung muß diese Multiplizität besitzen. Die Beschreibung kann auch unvollständig sein. Ich sage z.B.: Das Innere eines Flecks ist blau, außerhalb ist das Papier teils weiß, teils schwarz.[54]



Ich will nun das Beispiel noch etwas weiter vereinfachen und nehme an, die Farbenflecke, die ich beschreiben soll, seien nur Rechtecke und Quadrate, die parallel zu den Seiten des Papierblattes gestellt sind.



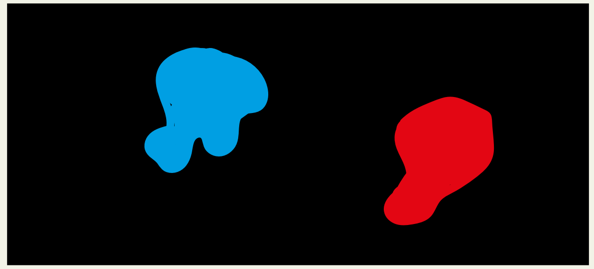
Jedes Rechteck kann ich beschreiben durch vier Zahlenangaben, nämlich durch die Koordinaten des linken oberen Eckpunktes, durch seine Länge und durch seine Breite, also durch (x, y; u, v). Die Angabe dieser vier Koordinaten ist mit jeder anderen Angabe unverträglich. Ebenso kann ich die Farbe des Rechtecks beschreiben, indem ich gleichsam die Farbenskala anlege. (Die Farben haben freilich nicht die Multiplizität der Längen, lassen sich also nicht durch *einen* Maßstab messen. Statt nun die Verteilung der Farben durch Sätze zu beschreiben, könnte ich es auch durch ein System von Maßstäben tun: Ich nehme so viele Maßstäbe, als Koordinaten in meiner Beschreibung vorkommen und *stelle diese Maßstäbe*:



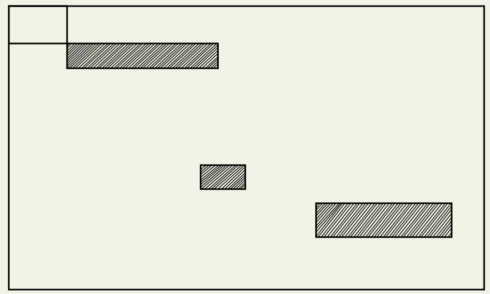
54. Im Notizbuch ist das folgende Diagramm überseitig, und es sollte sicherlich eine allgemeine Illustration von dem, was ihm folgt sein. (F. H.)

temos que descrever as cores. Isto será feito por meio de algum sistema de descrição de cores, digamos que por meio de índices. (Podemos idealizar vários destes sistemas.)

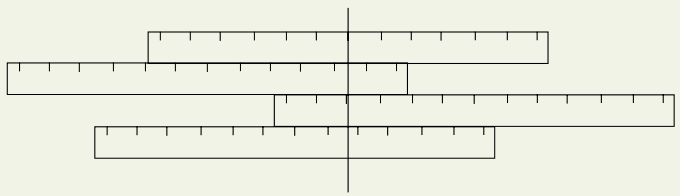
Portanto, a descrição conterá: equações para linhas e índices de cores. Estas partes da descrição são necessárias, isto é, toda descrição possível tem que ter esta multiplicidade. A descrição também pode estar incompleta. Por exemplo, eu digo: o interior de uma mancha é azul, o exterior é um papel parcialmente branco, parcialmente preto.[54]



Agora quero simplificar um pouco mais o exemplo e assumir que as manchas de cor que devo descrever são apenas retângulos e quadrados situados paralelamente às laterais da folha de papel.



Posso descrever cada retângulo por quatro números, a saber, pelas coordenadas do ponto do canto superior esquerdo, por seu comprimento e por sua largura, ou seja, por (x, y; u, v). A especificação destas quatro coordenadas é incompatível com qualquer outra especificação. Também posso descrever a cor do retângulo aplicando a escala de cores, por assim dizer. (Admite-se que as cores não têm a multiplicidade dos comprimentos, portanto não podem ser medidas por *um* padrão de medida. Em vez de descrever a distribuição das cores em proposições, eu também poderia fazer isto usando um sistema de padrões de medida: tomo tantas escalas quanto coordenadas que aparecem na minha descrição, e *sobreponho estes padrões*:



54. No caderno, o diagrama a seguir está na página inteira e certamente deve ser uma ilustração geral do que se segue. (N. E.)

Die vollständige Beschreibung einer solchen Fläche würde durch eine Gruppe solcher gestellter Maßstabsysteme erfolgen. So wie hier verhält es sich überall. Wir geben der Wirklichkeit eine Koordinate; eine Farbe, eine Helligkeit, eine Härte und so weiter. Die Beschreibung muß immer so vor sich gehen, daß die Beschreibung nicht zweimal die gleiche Koordinate bestimmt. Um das zu verhüten, brauchen wir eine Syntax. Wir kommen auch ohne Syntax aus, wenn wir von vornherein ein System der Beschreibung benutzen, das der Wirklichkeit nicht zwei verschiedene Koordinaten-Werte geben kann.

Jeder Satz liegt in einem Satzsystem, das wie ein Maßstab an die Wirklichkeit angelegt wird. (Logischer Raum.)

Das, was ich das erste Mal gar nicht beachtet hatte, war dies, daß die Syntax der logischen Konstanten nur einen Teil einer umfassenden Syntax bildet. So kann ich z.B. das logische Produkt p . q nur dann bilden, wenn p und q dieselbe Koordinate nicht zweimal bestimmen.

Dort, wo aber die Sätze unabhängig sind, bleibt alles in Kraft: also die ganze Theorie des Schließens und so weiter.

SCHLICK: Läßt sich nichts auf die Frage antworten: Woher weiß ich, daß die und die Regeln der Syntax gelten? Woher weiß ich, daß an einer Stelle nicht rot und blau zugleich sein kann? Liegt hier nicht doch eine Art empirischer Erkenntnis vor?

WITTGENSTEIN: Ja und nein. Es kommt ganz darauf an, was man unter empirisch versteht. Versteht man unter empirischer Erkenntnis eine solche, die durch einen Satz ausgedrückt werden kann, dann ist es keine empirische Erkenntnis. Versteht man unter Empirie etwas anderes, dann ist auch die Syntax empirisch. Ich habe in meinem Traktat einmal gesagt: Die Logik ist. vor dem Wie, aber nicht vor dem Was.[55] Die Logik hängt davon ab, daß etwas existiert (im Sinne von: etwas vorhanden ist), daß es Tatsachen gibt. Sie ist unabhängig davon, wie die Tatsachen beschaffen sind, von dem Sosein. Daß es Tatsachen gibt, das ist durch keinen Satz beschreibbar. Wenn Sie wollen, würde ich genau so gut sagen: Die Logik ist empirisch — wenn Sie *das* Empirie nennen.

[Wenn wir sagen: etwas ist empirisch, so meinen wir damit: wir können es uns auch anders denken. (In diesem Sinne ist jeder sinnvolle Satz zufällig.) In diesem Sinn ist das Dasein der Welt nicht empirisch; denn wir können es uns nicht anders denken. Wir können uns nicht eine Welt denken, die einmal ist und einmal nicht ist. Bemerkung nach dem Vortrag Wittgensteins über Ethik; ungefähr.][56]

SCHLICK: Woher weiß ich nun aber, daß gerade diese Regeln gelten und keine andern? Kann ich mich nicht irren?

WITTGENSTEIN: Es verhält sich damit immer so: Alles, was wir tun, besteht darin, daß wir das erlösende Wort finden. In der Grammatik kann man nichts entdecken. Es gibt keine Überraschungen. Wenn wir eine Regel formulieren, so haben wir immer das Gefühl: Das hast du schon längst gewußt. Wir können nur eines tun, die Regel, die wir unbewußt angewendet haben, klar aussprechen. Wenn ich nun verstehe, was eine Längenangabe bedeutet, so weiß ich

55. TLP 5,552. (F. H.)

56. LE, S. 9. Dieser Hinweis zeigt, daß die Vorlesung vor Januar 1930 geschrieben wurde. Herr R. Rhees sagt, daß sie zwischen Sept. 1929 und Dez. 1930 gehalten worden sei. (F. H.)

A descrição completa de tal área seria feita por um grupo de tais sistemas de escalas sobrepostas. É assim em todo lugar. Damos uma coordenada à realidade; uma cor, um brilho, uma dureza e assim por diante. A descrição tem que ser sempre realizada de forma que a descrição não determine a mesma coordenada duas vezes. Para evitar isto, precisamos de uma sintaxe. Podemos dar conta disto sem sintaxe se utilizarmos um sistema de descrição desde o início que não pode dar à realidade dois valores de coordenadas diferentes.

Cada proposição está em um sistema de proposições que é aposto à realidade como um padrão de medida. (Espaço lógico.)

O que eu não prestei atenção na primeira vez foi que a sintaxe das constantes lógicas é apenas parte de uma sintaxe abrangente. Assim, só posso formar, por exemplo, o produto lógico p . q se p e q não determinarem a mesma coordenada duas vezes.

Mas onde as proposições são independentes, tudo permanece em vigor: isto é, toda a teoria da inferência e assim por diante.

SCHLICK: Existe alguma resposta para a pergunta: como posso saber se tal e tal regra da sintaxe é válida? Como posso saber se não pode haver vermelho e azul ao mesmo tempo em um lugar? Não existe aqui, afinal, algum tipo de conhecimento empírico?

WITTGENSTEIN: Sim e não. Tudo depende do que você entende por empírico. Se alguém entende por conhecimento empírico algo que pode ser expresso por uma proposição, então não é conhecimento empírico. Se alguém entende outra coisa por empirismo, então a sintaxe também é empírica. Em meu Tratado uma vez disse: A lógica está antes do como, mas não antes do quê.[55] A lógica depende do fato de que algo exista (no sentido de que algo está lá), de que existem fatos. É independente da natureza dos fatos, do que seja. Que existem fatos não pode ser descrito por nenhuma proposição. Se você quisesse, eu do mesmo modo diria: a lógica é empírica — se você chamar *isto* de empírico.

[Quando dizemos: algo é empírico, queremos dizer: podemos pensar de forma diferente. (Neste sentido, toda sentença significativa é acidental.) Neste sentido, a existência do mundo não é empírica; porque não podemos pensar de outra maneira. Não podemos imaginar um mundo que ora existe, ora não existe. Comentário após a fala de Wittgenstein sobre ética; aproximadamente.][56]

SCHLICK: Mas como posso saber se estas regras são válidas e não outras? Não posso estar errado?

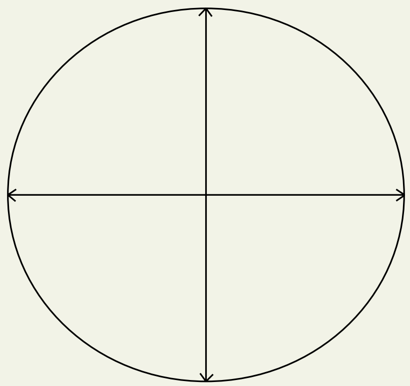
WITTGENSTEIN: É sempre assim: tudo o que fazemos consiste em encontrar a palavra redentora. Não se pode descobrir nada na gramática. Não há surpresas. Quando formulamos uma regra, sempre temos o sentimento: você já sabia disto há muito tempo. Só há uma coisa que podemos fazer, e é articular claramente a regra que aplicamos inconscientemente. Se agora entendo o que significa uma especificação de comprimento, então também sei que se uma pessoa mede 1,6 metros de comprimento, ela não tem 2 metros. Eu sei que medir estabelece apenas

55. TLP 5,552. (N. E.)

56. LE, p. 9. Esta nota mostra que a palestra foi escrita antes de janeiro de 1930. R. Rhees diz que foi realizada entre setembro de 1929 e dezembro de 1930. (N. E.)

auch, daß, wenn ein Mensch 1,6 m lang ist, er nicht 2 m lang ist. Ich weiß, daß durch die Messung nur ein Wert in einer Skala festgelegt wird und nicht mehrere Werte. Wenn Sie mich fragen: Woher weiß ich das? so erwidere ich einfach: Daher, daß ich den Sinn der Aussage verstehe. Es ist unmöglich, den Sinn einer solchen Aussage zu verstehen und nicht die Regel zu kennen. [Ich kann die Regel im Gebrauch kennen, ohne sie ausdrücklich formuliert zu haben.]

Wenn ich den Sinn einer Farbenaussage verstehe, so weiß ich auch, daß nicht zwei Farben am gleichen Ort sein können und so weiter. Nehmen wir folgenden Fall : Sie sagen: Da ist ein Kreis. Seine Länge ist 3 cm und seine Breite ist 2 cm.



Da würde ich denn doch sagen: Ja, was verstehst du denn unter einem Kreis? Wenn du das Wort »Kreis« in derselben Bedeutung verstehst wie wir, dann verbieten die Regeln der Syntax, die Kreiskoordinate (den Radius) zweimal zu bestimmen. Die Regel der Syntax gehen einfach aus der Definition des Kreises hervor, und diese Definition sagt ja nun, welchen Sinn die Aussagen über den Kreis haben. Wenn ich also überhaupt den Sinn eines Satzes verstehe, so muß ich auch die Syntax des in ihm auftretenden Ausdrucks verstehen. Entdecken läßt sich in der Grammatik nichts, sondern nur verdeutlichen.

SCHLICK: Wie kommt es aber, daß man das bei Längenangaben leicht einsieht, bei den Farben aber nicht? Husserl glaubt ja, hier eine Reihe synthetischer Urteile a priori entdeckt zu haben.[57] Worin liegt hier psychologisch der Unterschied, daß man das im einen Fall so gut einsieht, im andern nicht : Husserl mußte ja konsequenterweise auch annehmen, daß auch die Syntax der Längenangaben synthetische Urteile a priori sind.

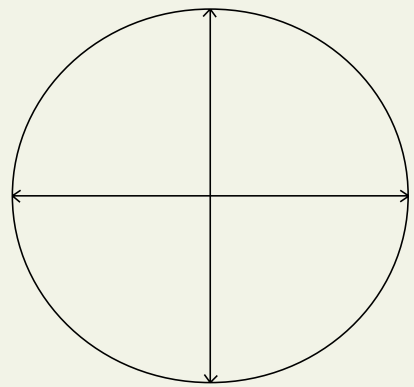
WITTGENSTEIN: Das kann mehrere Gründe haben. Z. B. sieht man ja beim Anlegen eines Maßstabes, daß, wenn etwas 2 m lang ist, es nicht 3 m lang ist; denn der eine Meter steht heraus. Tatsächlich haben wir ja keinen Maßstab für die Farben.

WAISMANN: Manche Psychologen haben so sehr geglaubt, daß es sich um empirische Sachverhalte handelt, daß sie sogar experimentelle Untersuchungen angestellt haben, ob man nicht zwei Farben am selben Ort sehen kann.

57. Siehe oben, Anmerkung auf S. 45. (F. H.)

um valor em uma escala e não vários valores. Se você me perguntar, como sei disto? então eu simplesmente respondo: porque entendo o sentido do enunciado. É impossível entender o sentido deste enunciado e não saber a regra. [Posso conhecer a regra em uso sem tê-la formulado explicitamente.]

Se eu entendo o sentido de um enuniado sobre cor, também sei que duas cores não podem estar no mesmo lugar e assim por diante. Tomemos o seguinte caso: Você diz: ali está um círculo. Seu comprimento é de 3 cm e sua largura de 2 cm.



Neste caso eu não diria então: mas o que você compreende por círculo? Se você compreende a palavra "círculo" da mesma maneira que nós, então as regras da sintaxe proíbem especificar a coordenada do círculo (o raio) duas vezes. A regra da sintaxe simplesmente emerge da definição de círculo, e esta definição diz que sentido as declarações sobre o círculo têm. Portanto, se compreendo o sentido de uma proposição, então também tenho que compreender a sintaxe da expressão que nela ocorre. Nada pode ser descoberto na gramática, apenas esclarecido.

SCHLICK: Mas como é que se pode ver isto tão facilmente em termos de comprimento, mas não em termos de cores? Husserl acredita ter descoberto aqui uma série de juízos sintéticos a priori.[57] Onde é que está psicologicamente aqui a diferença de que se vê tão bem em um caso e não no outro? Husserl, para ser consequente, teve que assumir também que a sintaxe das especificações de comprimento são juízos sintéticos a priori.

WITTGENSTEIN: Pode haver vários motivos. Por exemplo, quando você traça um padrão, pode ver que se algo tem 2 m de comprimento, não tem 3 m; porque um metro se sobressai. Mas, de fato, não temos um padrão para as cores.

WAISMANN: Alguns psicólogos acreditavam tanto que se tratava de fatos empíricos que até realizaram investigações experimentais para saber se não se podiam ver duas cores no mesmo lugar.

WITTGENSTEIN: Isto também seria possível: você teria que me dizer qual método estes

57. Ver acima a nota da p. 46 (N. E.)

WITTGENSTEIN : Auch das wäre möglich: Sie müßten mir sagen, welche Methode jene Psychologen benutzt haben, d. h. was ihnen als Verifikation gegolten hat. Erst dann kann ich sagen, was der Sinn einer solchen Annahme ist. Es wäre ja denkbar, daß ein solche Untersuchung einen guten Sinn hat — doch lehrt erst die Methode bei der Beantwortung, wonach man eigentlich gefragt hat. Erst wenn ich die Frage beantwortet habe, kann ich wissen, wonach ich gefragt habe. (Der Sinn eines Satzes ist die Methode seiner Verifikation.)

SCHLICK: Ich bin damit noch nicht ganz zufrieden. Sollte man nicht eine solche Sprache konstruieren, daß sich die Regeln der Syntax in ihr unmittelbar zeigen?

WAISMANN : Das ist ja der Fall, wenn wir als Beschreibung ein System von Maßstäben nehmen. Wenn das Zeichensystem die richtige Multiplizität hat, werden die Regeln der Syntax überflüssig. So unterliegt der Gebrauch des Wortes »nördlich von« gewissen syntaktischen Regeln. Ich darf nicht sagen: »A liegt nördlich von B und B liegt nördlich von A« . Aber die Landkarte kann diesen Unsinn nicht darstellen, weil sie die richtige Multiplizität hat.

WITTGENSTEIN: Es ist so: Syntax und Zeichen arbeiten immer gegeneinander. Was die Zeichen leisten, geht auf Kosten der Syntax, und was die Syntax leistet, geht auf Kosten der Zeichen. Ich kann sagen: Ein Zeichensystem von richtiger Mannigfaltigkeit macht die Syntax überflüssig. Ich kann aber ebensogut sagen: Die Syntax macht ein solches Zeichensystem überflüssig. Ich kann ja auch ein unvollkommenes Zeichensystem verwenden und die Regeln der Syntax hinzufügen. Beide zusammen leisten genau dasselbe, ⟨es⟩ ist also genau das gleiche Darstellungssystem.

Z.B. ist meine Notation der logischen Konstanten nicht besser und nicht schlechter als die Russellsche.[58] Die Russellschen Zeichen und die Syntax leisten genau dasselbe wie meine Notation. Die meinige hat vielleicht nur den Vorzug, daß sie manches etwas klarer erkennen läßt. Sie zeigt z. B., was das Gemeinsame aller Sätze der Logik ist, wozu man das eigentlich braucht. Aber an sich ist die Russellsche Schreibweise genau so berechtigt. Mein Zeichensystem hat von vornherein die richtige Multiplizität, und deshalb brauche ich nicht die syntaktischen Regeln von Russell.

Zusammenfassend kann man sagen: Die Verkoppelung der Sätze einer Wahrheitsfunktion bildet nur einen Teil einer Syntax. Die von mir seinerzeit aufgestellten Regeln werden jetzt eingeengt durch die Regeln, die aus der inneren Syntax der Sätze stammen und die verbieten, daß zwei Sätze der Wirklichkeit verschiedene Koordinaten geben. Alle Wahrheitsfunktionen sind erlaubt, die nicht durch diese Regeln verboten sind.

SCHLICK: Hat man nicht das Gefühl, daß die logischen Konstanten (die Wahrheitsfunktionen) etwas Wesentlicheres sind als die besonderen Regeln der Syntax, daß etwa die Möglichkeit, ein logisches Produkt »p . q« zu bilden, allgemeiner, gewissermaßen umfassender ist als die Regeln der Syntax, daß rot und blau nicht am selben Ort sein können? Die erste Regel enthält ja nichts von Farbe und Ort.

WITTGENSTEIN: Ich glaube nicht, daß hier ein Unterschied besteht. Die Regeln für das logische Produkt etc. sind ja nicht loszulösen von anderen Regeln der Syntax. Beide gehören zur Methode der Abbildung der Welt.

58. Z. B. »(WWFW) (p, q)« heißt »Wenn p, so q «: vgl. TLP 4,442, 5,101. (F. H.)

psicólogos usaram, isto é, o que eles contaram como verificação. Só então posso dizer qual é o sentido de tal suposição. É concebível que tal investigação faça um bom sentido — mas só o método ensina a resposta para o que alguém realmente perguntou. Só quando a pergunta tiver sido respondida poderei saber pelo que estava perguntando. (O sentido de uma proposição é o método de sua verificação.)

SCHLICK: Não estou totalmente satisfeito com isto ainda. Não se deveria ser construir uma linguagem em que as regras da sintaxe sejam nela imediatamente mostradas?

WAISMANN: Este é o caso se tomarmos um sistema de padrões como uma descrição. Se o sistema de sinais tiver a multiplicidade correta, as regras da sintaxe tornam-se supérfluas. O uso da palavra “ao norte de” está sujeito a certas regras sintáticas. Não tenho permissão para dizer: “A está ao norte de B e B está ao norte de A”. Mas o mapa não pode representar este absurdo porque tem a multiplicidade correta.

WITTGENSTEIN: É assim: sintaxe e sinais sempre funcionam reciprocamente. O que cumprem os sinais vai às expensas da sintaxe, o que cumpre a sintaxe vai às expensas dos sinais. Posso dizer: um sistema de sinais com a multiplicidade correta torna a sintaxe supérflua. Mas também posso dizer: a sintaxe torna supérfluo este sistema de sinais. Eu também posso usar um sistema incompletos de sinais e adicionar as regras da sintaxe. Ambos em conjunto cumprem exatamente a mesma coisa, então ⟨ele⟩ é exatamente o mesmo sistema de apresentação.

Minha notação das constantes lógicas, por exemplo, não é nem melhor nem pior do que as de Russell.[58] Os sinais e a sintaxe de Russell cumprem exatamente a mesma coisa que minha notação. O minha só tem talvez a vantagem de tornar algumas coisas mais claramente reconhecíveis. Ela mostra, por exemplo, o que é comum a todas as proposições da lógica, o que realmente se necessita para isto. Mas, em si, a notação de Russell é igualmente justificada. Meu sistema de sinais tem desde o princípio a multiplicidade correta e, por isto, não preciso das regras sintáticas de Russell.

Em resumo pode-se dizer: o acoplamento das proposições em uma função de verdade forma apenas uma parte de uma sintaxe. As regras que estabeleci na época agora são restringidas pelas regras que se originam da sintaxe interna das proposições e que proíbem duas proposições de dar à realidade diferentes coordenadas. Todas as funções de verdade são permitidas, desde que não proibidas por estas regras.

SCHLICK: Não se tem a sensação de que as constantes lógicas (as funções de verdade) são algo mais essencial do que as regras da sintaxe em particular, de que por exemplo a possibilidade de formar um produto lógico »p . q« seja mais geral, em certo sentido mais abrangente, do que as regras da sintaxe de que vermelho e azul não podem estar no mesmo lugar? A primeira regra não contém nada sobre cor ou lugar.

WITTGENSTEIN: Não acho que haja qualquer diferença aqui. As regras para o produto lógico etc. não podem ser separadas de outras regras de sintaxe. Ambas pertencem ao método de mapear o mundo.

58. Por exemplo “(VVFV) (p, q)” significa “se p, então q”: cf. TLP 4,442, 5,101. (N. E.)

⟨»DIE HEUTIGE ERKENNTNISLAGE IN DER MATHEMATIK«⟩

Wittgenstein liest Weyl (Symposionartikel)[59] und macht dazu verschiedene Bemerkungen.

Ungefähre Wiedergabe

WEYL MEINT: Ein mathematisches Urteil gilt entweder für alle Zahlen — dann ist es nicht verneinbar. Oder ein mathematisches Urteil gilt für eine konkrete Zahl. Das bedeutet Existenz. Oder es liegt keiner dieser beiden Fälle vor. Der erste Fall und der zweite Fall verhalten sich zueinander nicht wie Satz und Negation.

WITTGENSTEIN BEMERKT DAZU: Im zweiten Falle liegt eine mathematische Aussage vor — die kann ich bejahen oder verneinen. Mit Existenz hat das gar nichts zu tun.[60][61] Wenn ich sage: in der 800sten Stelle von π kommt eine Sequenz vor - so habe ich damit eben nur dieses gesagt und nichts anderes. Wenn ich das verneine, so habe ich damit eben auch nur gesagt: es kommt an der 800sten Stelle keine Sequenz vor, aber nicht: Es gibt keine Sequenz.

Die Aussage für *alle* Zahlen wird nicht durch einen Satz dargestellt, sondern durch die Induktion. Diese kann man allerdings nicht verneinen, aber auch nicht bejahen, denn sie behauptet nichts. Also: Wo eine Aussage vorliegt, ist sie verneinbar. Und wo ein Gebilde nicht verneinbar ist, da ist auch keine Aussage da. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt allerdings nicht — und zwar einfach deshalb, weil es sich hier nicht um Sätze handelt.

Die Allgemeinheit zeigt sich nicht in den Buchstaben. Diese haben, mit der Allgemeinheit überhaupt nichts zu tun. Die Allgemeinheit zeigt sich darin, daß es *so weiter geht*. (Das zeigt schon eine Windung der Spirale.)

Freiwerdende Wahlfolge

Eine freiwerdende Wahlfolge ist zunächst etwas Empirisches. Es sind einfach die Zahlen, die

59. »Die heutige Erkenntnislage usw.« in *Symposion*, I (1927), S. 1-32. (F. H.)

60. Weyl tut so, als ob es zwar eine All-Aussage gäbe, aber keine Negation, weil die Existenzaussage ein »Urteilsabstrakt« ist und nur die Konstruktion (Auffindung der Zahl) etwas sagt. Aber in Wahrheit sind das zwei gänzlich verschiedene Dinge: Die All-Aussage wird korrekt durch eine Induktion ausgedrückt und ist als solche freilich nicht verneinbar. Die Behauptung, daß an einer bestimmten Stelle eine Zahl vorkommt, ist natürlich eine Behauptung und ist als solche wieder verneinbar. Nun lautet die Verneinung einfach: An der betreffenden Stelle kommt diese Zahl nicht vor. Der Irrtum entsteht dadurch, daß man die Extension wie ein Ganzes betrachtet. Es hat nämlich einen guten Sinn zu sagen: Wenn 7 an der 25sten Stelle vorkommt, so kommt 7 zwischen der 20sten und 30sten Stelle vor. Aber es hat keinen Sinn zu sagen: 7 kommt überhaupt vor. Das ist gar keine Aussage.
Weyl wirft also verschiedene Dinge in einen Topf. Der Satz »7 kommt zwischen der 20sten und 30sten Stelle nicht vor« wird auf andere Weise verifiziert als der Satz »7 kommt zwar(*) nicht vor«. Wenn er aber auf andere Art verifiziert wird, *ist er ein anderer Satz*.
Wenn man auf die Frage, ob die Ziffer 7 in der Entwicklung von ϖ vorkommt, antwortet: Ja, an der 25sten Stelle kommt sie vor, so hat man nur die Frage beantwortet, ob 7 an der 25sten Stelle vorkommt, nicht aber die Frage, ob 7 überhaupt vorkommt. Hat die Frage einen Sinn, so hat auch die Antwort einen Sinn, gleichviel, ob sie bejahend oder verneinend ausfällt. (A. W.)

61. (*) Der Wortlaut »zwar« ist ungewiß. Das Wort ist sicherlich nicht »überhaupt« . (F. H.)

⟨»SITUAÇÃO DO CONHECIMENTO ATUAL EM MATEMÁTICA«⟩

Wittgenstein lê Weyl (artigo do simpósio)[59] e faz vários comentários sobre ele.

Reprodução aproximada

WEYL PENSA: Um juízo matemático ou vale para todos os números — e então não pode ser negado. Ou um juízo matemático vale para um número concreto. Isto significa existência. Ou não acontece nenhum destes dois casos. O primeiro caso e o segundo caso não se relacionam um com o outro como proposição e negação.

OBSERVAÇÕES DE WITTGENSTEIN: No segundo caso, há uma afirmação matemática — posso afirmar ou negar. Não tem nada a ver com existência.[60][61] Quando digo: há uma sequência no 800° dígito de π — estava apenas dizendo isto e nada mais. Se nego isto, eu apenas disse: não ocorre nenhuma sequência na 800° posição, mas não: não há uma sequência.

O enunciado para *todos* os números não é apresentado por uma proposição, mas por indução. De todo modo, não se pode ser negar, mas tampouco afirmar, porque ela nada assere. Portanto: onde há um enunciado, ele pode ser negado. E onde uma estrutura não pode ser negada, tampouco há qualquer enunciado. No entanto, o princípio do terceiro excluído não se aplica, de todo modo — especificamente porque não se trata aqui de proposições.

A generalidade não se mostra nas letras. Estas não têm absolutamente nada a ver com a generalidade. A generalidade se mostra no fato de que isto *continua assim*. (Isto já se mostra em uma volta da espiral.)

Sequência de livre escolha

Uma sequência de livre escolha é em princípio algo empírico. São simplesmente números que escrevo no papel. Se Weyl acredita que é uma estrutura matemática porque posso derivar outra de uma sequência de escolhas, por meio de uma lei geral, por exemplo

59. »Die heutige Erkenntnislage ...« in *Symposion*, I (1927), pp. 1-32. (N. E.)

60. Weyl age como se existisse uma afirmação geral, mas nenhuma negação, porque a afirmação de existência é um "juízo abstrato" e só a construção (encontrar o número) diz algo. Mas, na verdade, são duas coisas completamente diferentes: a afirmação geral é expressa corretamente por uma indução e, como tal, obviamente não é uma negação. A afirmação de que um número ocorre em um determinado lugar é, obviamente, uma afirmação e, como tal, pode ser negada novamente. Agora, a negação simplesmente diz: este número não ocorre no local referido. O erro surge ao considerar a extensão como um todo. Faz todo o sentido dizer: se 7 ocorre na 25ª posição, 7 ocorre entre a 20ª e 30ª posições. Mas não adianta dizer: 7 ocorre em absoluto. Esta não é de forma alguma uma afirmação.
Então Weyl joga coisas diferentes no mesmo pote. A proposição "7 não ocorre entre a 20ª e a 30ª posições" é verificada de forma diferente da proposição "7 não ocorre em absoluto".(*) Mas se for verificado de qualquer outra forma, *então é uma proposição diferente*.
Se se responde à pergunta sobre se cifra 7 ocorre na expansão de ϖ, a resposta é: sim, ocorre na 25ª posição, então, responde-se apenas à pergunta sobre se 7 ocorre na 25ª posição, mas não a questão sobre se 7 ocorre em tudo. Se a pergunta tem sentido, a resposta também tem sentido, independentemente de ser positiva ou negativa. (N. W.)

61. (*) A expressão "zwar" é incerta. A palavra certamente não é "überhaupt". (N. E.)

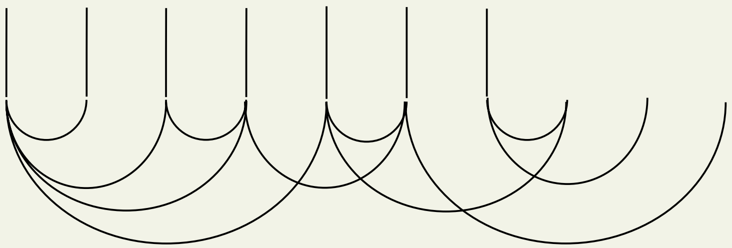
ich auf das Papier schreibe. Wenn Weyl glaubt, es sei deshalb ein mathematisches Gebilde, weil ich aus einer Wahlfolge eine andere ableiten kann, durch ein allgemeines Gesetz, z. B.

$$m_1, m_2, m_3, \ldots$$
$$m_1, m_1 + m_2, m_1 + m_3, \ldots$$

so ist dagegen zu sagen: Nein, damit ist nur gezeigt, daß ich Zahlen addieren kann, nicht aber, daß die Wahlfolge ein erlaubter mathematischer Begriff ist.

Was bedeutet die Aussage: An der vierten Stelle einer Wahlfolge steht eine Primzahl? Was bedeutet es, wenn ich Pflaumen in Häufchen ordne und sage: Das Häufchen dort enthält eine Primzahl von Pflaumen?

Würde die Aussage durch folgende Übersetzung wiedergegeben: Machen Sie in gleichen Entfernungen Striche (so viele, als es Pflaumen sind), ziehen Sie immer Halbkreise und sehen Sie nach, ob ein Halbkreis mit dem letzten Strich schließt.



Sonderbarerweise würde das *nicht* heißen, daß die Anzahl der Striche eine Primzahl ist. Die Darstellung würde das zwar enthalten, aber sie würde es nicht ausdrücken. Sie setzt die mathematische Aussage schon voraus. Ich habe nicht von Mathematik gesprochen, sondern von Bleistift und Papier, von Zirkel und Drehungen und so weiter. Aber ich habe nicht von Primzahlen gesprochen. Würde hier ein Dämon immer einen Strich eskamotieren — würde deswegen 7 keine Primzahl sein? Diese Sache ist so noch nicht klar ausgedrückt. Gemeint wird etwa: Die Arithmetik steckt immer schon in einer Beschreibung drin; aber die Beschreibung *ist* nicht die Arithmetik.

Ich kann wohl sagen: Die Menge der Pflaumen ist eine Primzahl, ohne daß ich die Pflaumen gezählt habe. Ich kann eine solche Aussage über den Kopf der Zahl hinweg machen. Aber ich kann nicht sagen: Die Menge der Pflaumen ist 7, *und 7 ist eine Primzahl*.

⟨*Verschiedenes*⟩

Kritik der Auffassung der Zeit in der Arithmetik bei Weyl.[62] Ablehnung der Frage, ob Kardinalzahlen oder Ordinalzahlen das Primäre sind. Ablehnung der Auffassung Kaufmanns, daß die Zahl das ist, was beim Zählen in verschiedenen Anordnungen invariant bleibt.[63]

Schopenhauer: Jede Zahl setzt alle vorhergehenden als Gründe ihres Seins voraus.[64] Witt-

62. Hier scheint der Hinweis nicht auf den Symposion-Artikel zu führen, sondern auf »Philosophie der Mathematik usw.« (s. S. 8, Anm.) S. 28: »Aber die Möglichkeit der Paarung, von der im Kriterium der Gleichzahligkeit die Rede ist, läßt sich nur prüfen, wenn die Zuordnungsakte einer nach dem anderen, in geordneter zeitlicher Folge, vorgenommen . . . werden . . . . Daher scheint es mir unbestreitbar, daß *die Ordinalzahl das Primäre ist*.« (F. H.)

63. F. Kaufmann, *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung*, Leipzig u. Wien, 1930, S. 78-79. (F. H.)

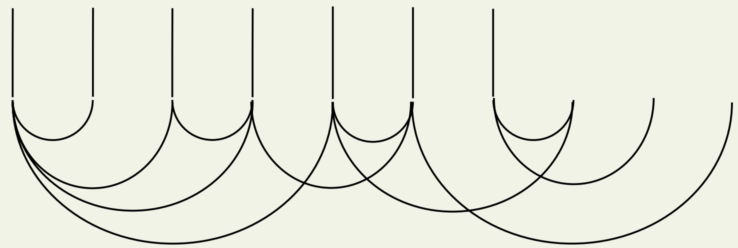
64. *Über die vierfache Wurzel usw*., § 38, von Weyl zitiert, »Philosophie der Mathematik«, a. a. o. (F. H.)

$$m_1, m_2, m_3, \ldots$$
$$m_1, m_1 + m_2, m_1 + m_3, \ldots$$

então deve-se dizer contra isto: Não, isto mostra apenas que posso somar números, mas não que a sequência de escolhas seja um conceito matemático admissível.

O que significa o enunciado: na quarta posição de uma seqüência de escolhas há um número primo? O que significa quando organizo ameixas em pilhas e digo: esta pilha contém um número primo de ameixas?

Se o enunciado fosse reproduzido pela seguinte tradução: coloque traços em distâncias equivalentes (tantos quantas ameixas houver), desenhe sempre semicírculos e confira se um semicírculo termina junto com o último traço.



Estranhamente, isto *não* significaria que o número de traços é primo. Mesmo que a representação o contivesse, não o expressaria. Ela já pressupõe o enunciado matemático. Eu não falei sobre matemática, mas sobre lápis e papel, compassos e voltas e assim por diante. Não estava falando sobre números primos. Se um demônio sempre escamoteasse um traço aqui — 7 não seria, por causa disto, um número primo? Esta coisa ainda não está claramente expressa. O que se quer dizer é, digamos: a aritmética sempre faz parte de uma descrição; mas a descrição não *é* aritmética.

Posso até dizer: o conjunto das ameixas é um número primo, sem ter contado as ameixas. Posso fazer esta afirmação sem fazer a contagem do número. Mas não posso dizer: o conjunto de ameixas é 7, *e 7 é um número primo*.

⟨*Vários*⟩

Crítica da concepção de tempo na aritmética por Weyl.[62] Rejeição da questão de saber se os números cardinais ou ordinais são os primários. Rejeição da visão de Kaufmann de que o número é o que permanece invariante ao contar em diferentes arranjos.[63]

Schopenhauer: todo número pressupõe todos os precedentes como razões de sua existên-

62. Aqui a referência não parece conduzir ao artigo do simpósio, mas a “Filosofia da Matemática, etc.” (ver p. 8, nota de rodapé) p. 28: “Mas a possibilidade de pareamento, que é mencionada no critério de equinumericidade pode só ser verificado se atos de ordenação forem executados um após o outro em uma ordem cronológica ordenada. . . portanto, parece-me indiscutível que *o número ordinal é o primário*.” (N. E.)

63. F. Kaufmann, *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung*, Leipzig u. Wien, 1930, pp. 78-79. (N. E..)

genstein: aber auch die Folgenden.[65]

Sonntag, 5. Januar 1930 (bei Schlick)

POSITIVE UND NEGATIVE SÄTZE[66]

Hat der negative Satz weniger Sinn als der positive? Ja und nein.

Ja, wenn folgendes gemeint ist: Kann ich von p auf q schließen, aber nicht von q auf p, so hat q weniger Sinn als p. Wenn ich nun sage: »Die Azalee ist rot« und »Die Azalee ist nicht blau«, so kann ich zwar aus dem ersten Satz auf den zweiten schließen, aber nicht umgekehrt. Insofern kann man sagen, daß ein negativer Satz weniger Sinn hat als ein positiver.

Nein, wenn es sich um folgendes handelt (was mir eigentlich am meisten am Herzen liegt): Der negative Satz gibt der Wirklichkeit dieselbe Multiplizität wie der positive Satz. Wenn ich sage: »Ich habe keine Magenschmerzen«, so habe ich der Wirklichkeit dieselbe Multiplizität gegeben, wie wenn ich sage: »Ich habe Magenschmerzen.« Denn wenn ich sage: »Ich habe keine Magenschmerzen«, so setze ich im Satz bereits die Existenz des positiven Satzes voraus, ich setze die Möglichkeit der Magenschmerzen voraus, und mein Satz bestimmt den Ort im Raum der Magenschmerzen. Es ist nicht etwa so, daß mein gegenwärtiger Zustand nicht die geringste Verbindung mit den Magenschmerzen hätte. [Wenn ich sage: »Es hat null Grad«, so habe ich damit den Nullpunkt des Temperaturraums charakterisiert.] Wenn ich sage: »Ich habe keine Magenschmerzen«, so sage ich gleichsam: »Ich befinde mich im Nullpunkt des Magenschmerzraums.« Aber der Satz setzt bereits den ganzen logischen Raum voraus. [Ebenso: »Diese beiden Körper haben keine Entfernung voneinander« ist von derselben Art wie der Satz: »Diese beiden Körper haben die und die Entfernung voneinander«. In beiden Fällen dieselbe Multiplizität.]

Das letztere meine ich nun, wenn ich sage, der positive Satz hat nicht mehr Sinn als der negative. Beide geben der Wirklichkeit dieselbe Mutiplizität.

WAISMANN: Der negative Satz gibt der Wirklichkeit mehr Spielraum als der positive. Sage ich z.B.: »Die Azalee ist nicht blau«, so weiß ich noch nicht, welche Farbe sie hat.

WITTGENSTEIN: Gewiß. In diesem Sinne sagt der negative Satz weniger als der positive. Ich habe einmal geschrieben: » Ich verstehe den Sinn eines Satzes, wenn ich weiß, wie es sich

65. Im Notizbuch folgt eine Lücke von 1¼ Seiten. (F. H.)
66. Eine sehr gute Methode, den Abbildungscharakter der Sprache zu illustrieren, besteht darin, daß man die Sätze der Sprache als *Anweisungen* auffaßt, etwas zu tun. Ich leite Sie durch meine Worte im Zimmer herum: »Jetzt gehen Sie drei Schritte nach vorwärts, jetzt zwei nach links, jetzt strecken Sie den rechten Arm aus, etwas höher, nein, jetzt schon zu viel, und so weiter.« Hier ist ganz klar, daß die Sprache die selbe Multiplizät besitzen muß wie die Bewegungen, die ich durch meine Sätze dirigiere. Alles, was Sie tun, muß schon in dem enthalten sein, was ich sage. (Wenn ich an einer Maschine drei Geschwindigkeiten einschalten soll, so kann ich das unmöglich dadurch tun, daß ich einen Hebel bediene, der nur zwei Stellungen hat.) Ebenso kann ich durch meine Worte das Mischen von Farben dirigieren. Ich sage: »Nehmen Sie blau, etwas weiß, noch mehr weiß, jetzt noch ein klein wenig blau, und so weiter.« Wenn ich nun einen negativen Satz ausspreche, wie: »Nehmen Sie nicht blau« , so ist damit nicht gesagt, daß Sie jetzt etwa die Hände hoch strecken, oder tanzen sollen, sondern der Satz verbietet nur, daß Sie blau nehmen, und gibt jede andere Farbe frei. Also auch der negative Satz gibt der Wirklichkeit dieselbe Multiplizität wie der positive, und das allein liegt mir am Herzen, wenn ich sage, daß der negative Satz ebensoviel Sinn hat wie der positive. (A. W.)

cia.[64] Wittgenstein: mas também os seguintes.[65]

Domingo, 5 de Janeiro de 1930 (na casa de Schlick)

PROPOSIÇÕES POSITIVAS E NEGATIVAS[66]

A proposição negativa faz menos sentido do que a positiva? Sim e não.

Sim, se o seguinte quiser dizer: se posso inferir de p para q, mas não de q para p, então q tem menos sentido do que p. Se disser agora: “A azaléia é vermelha” e “A azaléia não é azul”, mesmo que possa deduzir a segunda da primeira proposição, não posso o contrário. Nesta medida é que se pode dizer que uma proposição negativa tem menos sentido do que uma positiva.

Não, se se tratar do seguinte (o que é mais importante para mim): A proposição negativa dá à realidade a mesma multiplicidade que a proposição positiva. Quando digo: “Não tenho dor de estômago”, dou à realidade a mesma multiplicidade do que quando digo: “Tenho dor de estômago”. Pois quando digo: “Não tenho dor de estômago” já pressuponho na proposição a existência da proposição positiva, pressuponho a possibilidade da dor de estômago e minha proposição determina o lugar no espaço da dor de estômago. Não é que minha condição atual não tenha a menor ligação com dores de estômago. [Quando digo: “Está zero graus”, caracterizo o ponto zero do espaço de temperaturas.] Quando digo: “Não tenho dor de estômago”, digo, por assim dizer: “Estou no ponto zero do espaço das dores de estômago. “Mas a proposição já pressupõe todo o espaço lógico. [Da mesma forma: “Não há distância entre estes dois corpos” é do mesmo tipo que a frase: “Estes dois corpos estão a tal e tal distância um do outro”. A mesma multiplicidade em ambos os casos.]

O último é o que quero dizer quando digo que a proposição positiva não tem mais sentido do que a negativa. Ambas dão a mesma multiplicidade à realidade.

WAISMANN: A proposição negativa dá mais margem de manobra à realidade do que a positiva. Por exemplo, se digo: “A azaléia não é azul”, ainda não sei de que cor ela é.

WITTGENSTEIN: Certamente. Neste sentido, a proposição negativa diz menos que a positiva. Certa vez, escrevi: “Compreendo o sentido de uma proposição se sei qual é o caso se ela for verdadeira e se for falsa.[67][68] Com isto queria dizer: se sei quando ela é verdadeira, então, *do mes-*

64. *Über die vierfache Wurzel usw*., § 38, citado por Weyl, »Philosophie der Mathematik«, op. cit. (N. E.)
65. No caderno de anotações há uma lacuna de 1¼ de página. (N. E.)
66. Uma maneira muito boa de ilustrar a natureza figurativa da linguagem é interpretar as sentenças da linguagem como *instruções* para fazer algo. Vou guiá-lo pela sala com minhas palavras: “Agora dê três passos à frente, agora dois para a esquerda, agora estique o braço direito, um pouco mais alto, não, agora foi demais, e assim por diante.” Aqui está totalmente claro que a linguagem tem que ter a mesma multiplicidade dos movimentos que dirijo através das minhas proposições. Tudo o que você fizer já tem que estar contido no que digo. (Se devo ligar três velocidades em uma máquina, não posso fazer isso operando uma alavanca que tem apenas duas posições.) Da mesma forma, posso usar minhas palavras para direcionar a mistura de cores. Eu digo: “Pegue o azul, um pouco de branco, ainda mais branco, agora um pouco de azul e assim por diante.” Se eu agora proferir uma proposição negativa como: “Não pegue o azul”, não digo que você deveria agora esticar as mãos para cima, ou dançar, mas a proposição apenas proíbe de usar o azul, e permite qualquer outra cor. Portanto, a proposição negativa também dá à realidade a mesma multiplicidade que a positiva, e isto é a única coisa que importa para mim quando digo que a proposição negativa tem tanto significado quanto a positiva. (N.W.)
67. NL pp. 93-94; cf.. TLP 4,024, 2,223. (N.E.)
68. Para compreender o sentido da proposição: “A azaléia não é azul”, não preciso ser capaz de imaginar as outras cores.

verhält, wenn der Satz wahr ist und wenn der Satz falsch ist«.[67][68] Ich wollte damit sagen: Wenn ich weiß, wann er wahr ist, so weiß ich auch *zugleich*, wann er falsch ist. Wenn ich sage: »Die Azalee ist nicht blau«, so weiß ich auch, wann sie blau ist. Um zu erkennen, daß sie nicht blau ist, muß ich sie mit der Wirklichkeit vergleichen.

WAISMANN: Sie gebrauchen das Wort »*vergleichen*«. Wenn ich aber den Satz mit der Wirklichkeit vergleiche, so weiß ich, daß die Azalee rot ist und *schließe* daraus, daß sie nicht blau, nicht grün, nicht gelb ist. Was ich sehe, ist immer schon ein Sachverhalt. Ich sehe aber nie, daß die Azalee nicht blau ist.

WITTGENSTEIN: Ich sehe nicht rot, sondern ich sehe, *daß die Azalee rot ist*. In diesem Sinne sehe ich auch, daß sie nicht blau ist. An das Gesehene knüpft sich nicht erst ein Schluß, sondern ich weiß ihn unmittelbar beim Sehen.

Positive und negative Sätze stehen auf einer Stufe. Wenn ich den Maßstab anlege, so weiß ich nicht nur, wie lang etwas ist, sondern auch, wie lang etwas nicht ist. Wenn ich den positiven Satz verifiziere, so falsifiziere ich damit auch den negativen Satz. In dem Augenblick, da ich weiß, daß die Azalee rot ist, weiß ich auch, daß sie nicht blau ist. Beides ist untrennbar. Die Bedingungen für die Wahrheit eines Satzes setzen die Bedingungen für seine Falschheit voraus und umgekehrt.

DIE FARBE BLAU IN DER ERINNERUNG

Sehr merkwürdig ist die Art unseres Gedächtnisses. Man stellt sich meist vor, daß wir eine Art Erinnerungsbild der gesehenen Farben in uns herumtragen und daß dieses Erinnerungsbild mit einer Farbe, die ich gerade sehe, *verglichen* werde. Man meint, es handelt sich da um einen Vergleich. Ganz so ist es nicht. Stellen Sie sich folgendes vor. Sie haben ein ganz bestimmtes Blau, sagen wir Himmelblau, gesehen, und ich zeige Ihnen nun verschiedene Muster von blau. Sie sagen nun: »Nein, nein, das war es nicht, das war es auch nicht, auch das nicht. — Jetzt, das ist es!« Ist das nun so, wie wenn Sie an ihrem Kopf verschiedene Taster hätten und ich probiere nun, bis ich auf den ganz bestimmten Taster drücke, dann *klingelt* es. Geht nun das Wiedererkennen einer Farbe auch so vor sich? Klingelt es quasi in mir, schnappt irgend etwas beim Anblick der richtigen Farbe ein? Nein! Sondern ich weiß von einem bestimmten Blau nicht nur, daß es die richtige Farbe nicht ist, sondern ich weiß auch, in *welcher Richtung* ich die Farbe variieren muß, um zu der richtigen zu gelangen.[69] Das heißt, ich *kenne einen Weg, die Farbe zu suchen*. Ich kann Sie etwas, wenn Sie die Farbe mischen sollen, anleiten, indem ich sage: Mehr weiß, noch mehr weiß, jetzt schon zu viel, etwas blau und so weiter. D. h.: Die Farbe setzt schon das ganze *Farbensystem* voraus. Das Wiedererkennen einer Farbe ist kein einfacher Vergleich, obwohl es

---

67. NL S. 93-94; vgl. TLP 4,024, 2,223. (F. H.)

68. Um den Sinn des Satzes zu verstehen: »Die Azalee ist nicht blau«, brauche ich mir nicht die anderen Farben vorstellen zu können. Und wenn ich mir etwas vorstelle, so bedeutet das noch nicht, daß ich den Sinn eines Satzes verstehe. Um die Worte »blau«, »rot«, . . . zu verstehen, brauche ich nicht etwa die Farbe zu halluzinieren. [Das Denken hat nichts zu tun mit dem Erzeugen von Erlebnissen.] Ich muß nur den Sinn der Aussage verstehen, in welcher diese Worte vorkommen. (A. W.)

69. Wenn ich nämlich auf den Taster drücke und es läutet nicht, habe ich keine Ahnung, in welcher Richtung ich weiter gehen muß, um zu dem richtigen Taster zu kommen. Dagegen ist es nicht so, daß ich keine Ahnung habe, wo die richtige Farbe liegt. Ich weiß etwas von ihr, den Weg, um zu ihr zu gelangen. (A. W.)

mo modo, também sei quando é falsa. Quando digo: “A azaléia não é azul”, também sei quando é azul. Para reconhecer que não é azul, tenho que comparar com a realidade.

WAISMANN: Você usa a palavra “*comparar*”. Mas quando comparo a proposição com a realidade, sei que a azaléia é vermelha e daí *concluo* que não é azul, nem verde, nem amarela. O que vejo é desde sempre um estado de coisas. Mas nunca vejo que a azaléia não é azul.

WITTGENSTEIN: Não vejo vermelho, vejo *que a azaléia é vermelha*. Neste sentido também vejo que não é azul. Uma conclusão não está ligada ao que vi, mas sei disto imediatamente quando vejo.

Porposições positivas e negativas estão no mesmo nível. Quando aplico o padrão, eu não apenas sei por quanto tempo algo está, mas também por quanto tempo algo não está. Quando verifico a proposição positiva, também falsifico a proposição negativa. No momento em que sei que a azaléia é vermelha, também sei que não é azul. Ambas são inseparáveis. As condições para a verdade de uma proposição pressupõem as condições para sua falsidade e vice-versa.

A COR AZUL NA MEMÓRIA

A natureza da nossa memória é muito estranha. Geralmente se imagina que estamos carregando uma espécie de imagem de memória das cores que vimos e que esta imagem de memória está sendo *comparada* com uma cor que estou vendo atualmente. Pensa-se que é uma comparação. Mas realmente não é assim. Imagine o seguinte. Você viu um azul bem específico, digamos, azul celeste, e agora vou te mostrar diferentes amostras de azul. Agora você diz: “Não, não, não foi isso, não foi isso também não. — Agora é isto!” Isto então é como se você tivesse botões diferentes na cabeça e eu vou tentando em cada um até chegar a apertar o botão específico, e a campainha *toca*. O reconhecimento de uma cor também funciona desta forma? Toca uma campainha em mim, digamos, e alguma coisa se encaixa quando vejo a cor certa? Não! Mas eu não só sei que um certo azul não é a cor certa, mas também sei *em que direção* devo variar a cor para chegar à cor certa.[69] Isto significa que *conheço uma maneira de procurar a cor*. Eu posso te orientar quando você deve misturar a cor dizendo: mais branco, mais branco ainda, já é demais, um pouco de azul e assim por diante. Ou seja: a cor já pressupõe todo o *sistema de cores*. Reconhecer uma cor não é uma comparação fácil, embora em alguns aspectos seja semelhante a uma comparação. O reconhecimento também parece uma comparação, mas não é.[70]

A propósito: se você está procurando uma agulha escondida em um jogo de salão, na verdade não está procurando no espaço — porque você não tem nenhum método de busca — mas no

---

E quando imagino algo, isto ainda não significa que compreendo o sentido de uma proposição. Para compreender as palavras »azul«, »vermelho« ,. . . não preciso alucinar a cor. [Pensar não tem nada a ver com criar experiências.] Só tenho que compreender o sentido do enunciado em que estas palavras aparecem. (N. W.)

69. Se pressiono o botão e ele não toca, não tenho ideia de qual direção seguir para chegar ao botão certo. Por outro lado, não é que eu não tenha ideia de onde está a cor certa. Eu sei algo sobre ela, o caminho para chegar até ela. (N. W.)

70. O significado de uma palavra não é que eu possa visualizar seu conteúdo (imaginar vividamente, alucinar), mas que sei como chegar ao objeto. (N. W.)

in manchem einem Vergleich ähnlich ist. Das Wiedererkennen sieht auch wie ein Vergleich aus, ist aber keiner.[70]

Nebenbei: Wenn Sie beim Gesellschaftsspiel eine versteckte Nadel suchen, so suchen Sie eigentlich nicht im Raum — denn Sie haben ja gar keine Methode des Suchens — sondern in dem logischen Raum, den ich durch die Worte »kalt«, »warm«, »heiß« erzeuge. Suchen kann man nur dort, wo es eine *Methode des Suchens* gibt.

»DIE WELT IST ROT« II[71]

Ich komme noch einmal auf die Frage von Prof. Schlick zurück, wie es wäre, wenn ich nur die Farbe Rot kenne.[72] Darauf ist folgendes zu sagen: Wäre alles, was ich sehe, rot, und könnte ich das beschreiben, so müßte ich auch den Satz bilden können, daß es nicht rot ist. Das setzt bereits die Möglichkeit anderer Farben voraus. Oder das Rot ist etwas, das ich nicht beschreiben kann — dann habe ich auch keinen Satz, und dann kann ich auch nichts verneinen. In einer Welt, in der das Rot quasi dieselbe Rolle spielt wie die Zeit in unserer Welt, gäbe es auch keine Aussagen von der Form: Alles ist rot, oder: Alles, was ich sehe, ist rot.

Also: Sofern ein Sachverhalt vorliegt, kann er beschrieben werden, und dann setzt die Farbe Rot ein System von Farben voraus. Oder Rot bedeutet etwas ganz anderes, dann hat es keinen Sinn, es eine Farbe zu nennen. Dann kann man auch nicht davon sprechen.

LIEGT JEDER SATZ IN EINEM SYSTEM? II

Das kommt zunächst darauf an, was man unter einem »System« versteht. Jede Angabe über Längen liegt in einem System. Denn wenn ich verstehe, daß etwas 3 m lang ist, so verstehe ich auch, was es heißt, daß es 5 m lang ist. Die Angabe liegt bereits in einem Raum der möglichen Längen. Ebenso hat das Ding einen Farbraum um sich, einen Härteraum und so weiter.[73] Als ich das schrieb, hatte ich nur nicht gesehen, daß die Anzahl der Stellen dieses Raumes quasi die Teilstriche eines Maßstabes bilden und daß wir immer das ganze Satzsystem wie einen Maßstab an die Wirklichkeit anlegen. Die allgemeine Frage wäre so zu formulieren: Setzt der Satz »φa« andere Sätze dieser Art, z.B. »φb«, voraus?

WAISMANN: Daß das der Fall ist, sieht man schon daraus, daß man in jedem Satz eine Konstante durch eine Variable ersetzen kann. Die Möglichkeit der Begriffsbildung zeigt ja schon, daß

70. Die Bedeutung eines Wortes liegt nicht darin, daß ich mir seinen Inhalt vergegenwärtigen kann (anschaulich vorstellen, halluzinieren), sondern daß ich den Weg kenne, um zu dem Gegenstand zu gelangen. (A. W.)

71. »Die Welt ist rot« : Kann ich es durch einen Satz aussagen, dann ist die Aussage auch verneinbar, dann liegt der Satz in einem Raum. Ist es durch keine Aussage beschreibbar, dann kann ich auch nicht *fragen*, ob Rot das System der Farben voraussetzt.
[Alles, was ist, kann auch anders sein. Umkehrung: Nur das ist, was auch anders sein kann.]
Ein Zeichen (Wort) hat nur im Satz Bedeutung. Kann ich die Aussage nicht bilden: »Alles, was ich sehe, ist rot«, so hat auch das Wort »rot« keine Bedeutung.
Wenn das Wort »rot« überhaupt eine Bedeutung hat, so setzt es schon ein *System* von Farben voraus. [Unser System?] (A. W.)

72. Sihe oben, S. 43 f. (F. H.)

73. Vgl. TLP 2,0131. (F. H.)

espaço lógico que criei mediante as palavras “frio”, “quente”, “quente”.« Só se pode procurar onde existe um *método de busca*.

»O MUNDO É VERMELHO« II[71]

Voltarei à pergunta do Prof. Schlick sobre como seria se eu só conhecesse a cor vermelha.[72] Deve ser dito o seguinte: se tudo que vejo fosse vermelho, e se pudesse descrevê-lo, eu teria que poder também formar a proposição de que isto não é vermelho. Isto já pressupõe a possibilidade de outras cores. Ou o vermelho é algo que não posso descrever — então tampouco tenho a proposição e não posso negar nada. Ou, em um mundo em que o vermelho desempenha quase o mesmo papel que o tempo em nosso mundo, tampouco haveria enunciados da forma: tudo é vermelho, ou: tudo que vejo é vermelho.

Portanto: se um estado de coisas está presente, ele pode ser descrito, e então a cor vermelha pressupõe um sistema de cores. Ou vermelho significa algo completamente diferente, então não há por que chamá-lo de cor. Então também não se pode falar sobre isto.

TODA PROPOSIÇÃO ESTÁ EM UM SISTEMA? II

Isto depende, em primeiro lugar, do que se entende por “sistema”. Toda especificação sobre comprimentos está em um sistema. Porque se compreendo que algo tem três metros de comprimento, também compreendo o que significa ter cinco metros. A especificação já está em um espaço de comprimentos possíveis. Da mesma forma, a coisa tem um espaço de cor ao seu redor, um espaço de dureza e assim por diante.[73] Quando escrevi sobre isto, simplesmente não tinha visto que o número de dígitos neste quase espaço formam as marcas de um padrão de medida e que sempre aplicamos todo o sistema de sentenças à realidade como um padrão. A questão geral poderia ser formulada da seguinte forma: A proposição “φa” pressupõe outras sentenças deste tipo, por exemplo, “φb”?

WAISMANN: Você pode ver que este é o caso pelo fato de que você pode substituir uma constante por uma variável em toda proposição. A possibilidade de formação de conceitos já mostra que toda proposição está em um espaço lógico, e este espaço lógico é justamente o

71. “O mundo é vermelho”: se posso dizê-lo em uma proposição, então o enunciado também pode ser negado, então a proposição está no espaço. Se não pode ser descrito por nenhum enunciado, então não posso *perguntar* se o vermelho pressupõe o sistema de cores.
[Tudo o que existe também pode ser diferente. Inversão: Só isto é o que também pode ser diferente.]
Um sinal (palavra) só tem significado em uma proposição. Se não posso formular a afirmação: “Tudo o que vejo é vermelho”, a palavra “vermelho” também não tem significado.
Se a palavra “vermelho” tem algum significado, ela já pressupõe um sistema de cores. [Nosso sistema?] (N. W.)

72. Ver acima, p. 44s (N. E.)

73. Cf. TLP 2,0131. (N. E.)

jeder Satz in einem logischen Raum liegt, und dieser logische Raum ist eben das System.

WITTGENSTEIN: So sicher ist das nicht. Kann ich denn immer eine Konstante durch eine Variable ersetzen? Es ist offenbar so: Ist »φa« möglich, so ist auch »~ φa« möglich.

WAISMANN: Wie kann ich aber wissen, daß »~ φa« wahr ist? Doch wohl nur so, daß ich feststelle, daß ein Sachverhalt von der Form »φb« besteht. Die Möglichkeit des Negierens setzt also schon einen logischen Raum voraus.

WITTGENSTEIN: Es kommt darauf hinaus, ob das Zeichen »a« ein *notwendiges Zeichen* ist. Wenn es bloß den Satz »φa« gäbe, aber nicht »φb«, so wäre die Erwähnung von »a« überflüssig. Es würde genügen, »φ« allein zu schreiben. Der Satz wäre also nicht zusammengesetzt. Das Wesentliche am Satz ist aber, daß er *ein Bild* ist und Zusammensetzung hat. Soll also »φa« ein Satz sein, so muß es auch einen Satz »φb« geben, d. h. die Argumente von »φ( )« bilden ein System. Was ich freilich nicht weiß, ist, wie groß der Bereich der Argumente ist. Es können z.B. auch nur zwei sein. (Scheibe beim Telefon: frei, besetzt: Hier wissen wir: Nur diese zwei Werte kommen vor und diese bilden die Wirklichkeit ab. Eine Zwischenstellung bezeichnet nichts. Kein Übergang.)

Setzt aber »φa« auch »ψa« voraus? Jawohl. Denn dieselbe Überlegung lehrt: Gäbe es zu »a« nur eine einzige Funktion »φ«, so wäre sie überflüssig; man könnte sie weglassen. Das Satzzeichen wäre also einfach und nicht zusammengesetzt. Er[74] bildet nicht ab.

Zeichen, die entbehrlich sind, haben keine Bedeutung. Überflüssige Zeichen bezeichnen nichts.[75]

Ergebnis: So viele Konstanten in einem Satz vorkommen, in so vielen Dimensionen ist ein Satz variierbar. So viele Dimensionen hat der Raum, in dem der Satz liegt.

Der Satz durchgreift den ganzen logischen Raum.[76] Sonst wäre die Negation nicht verständlich.

SCHLUSS

WAISMANN: Aus einem vollständigen Satz kann man auf einen unvollständigen schließen.[77] Wenn ich z.B. weiß, daß in einem Quadrat ein bestimmter Kreis liegt, so weiß ich auch, daß in dem Quadrat irgendein Kreis liegt. Wie sieht hier der Schluß aus? Ist er eine Tautologie? Oder gibt es Schlußformen, die nicht die Form von Tautologien haben?

WITTGENSTEIN: Die Tautologie ist ja ganz nebensächlich. Nur in einer bestimmten Notation stellt sich der Schluß als Tautologie dar. Wesentlich sind nur die Regeln der Syntax, die man ja immer angewendet hat, längst bevor man wußte, was eine Tautologie ist.

Eine bestimmte Beschreibung sieht so aus: Eine Länge ist 25 m. Eine unbestimmte Beschreibung wäre: Eine Länge liegt zwischen 20 und 3 0 m. Nun werden diese beiden Beschreibungen »p« und »q«. Dann ist durch die Syntax der Worte »Länge«[78] festgesetzt, daß unmöglich der

74. Wahrscheinlich »Der Satz« (F. H.)
75. Vgl. TLP 3,328 ; 5 ,47321.(F. H.)
76. Vgl. TLP 3,42. (F. H.)
77. Siehe oben, S.9 f. (F. H.)
78. Sic (F. H.)

sistema.

WITTGENSTEIN: Não é tão certo assim. Posso sempre substituir uma constante por uma variável? Obviamente, é assim: Se “φa” for possível, então “~ φa” também é possível.

WAISMANN: Mas como posso saber se “~ φa” é verdadeiro? Provavelmente só de forma que estabeleça que existe um estado de coisas da forma “φb”. A possibilidade de negação, portanto, já pressupõe um espaço lógico.

WITTGENSTEIN: Depende de saber se o sinal “a” é um *sinal necessário*. Se houver apenas a proposição “φa”, mas não “φb”, a menção de “a” seria supérflua. Bastaria escrever “φ” sozinho. Portanto, a proposição não seria composta. O essencial da proposição, entretanto, é que ela é *uma imagem* e é composta. Portanto, se “φa” deve ser uma proposição, tem que haver também uma proposição “φb”; isto é, os argumentos de “φ ( )” formam um sistema. O que não sei, admitamos, é quão ampla é a gama de argumentos. Por exemplo, podem ser apenas dois. (Disco no telefone: livre, ocupado: aqui sabemos: só estes dois valores ocorrem e representam a realidade. Uma posição intermediária não denota nada. Sem transição.)

Mas “φa” também pressupõe “ψa”? Sim senhor. Porque a mesma consideração ensina: se houver apenas uma única função “φ” para “a”, então ela seria supérflua; poderia ser deixada de fora. Portanto, o sinal proposicional seria simples e não composto. Ela[74] não afigura.

Os sinais dispensáveis não têm significado. Sinais supérfluos nada denotam.[75]

Resultado: como muitas constantes ocorrem em uma proposição, esta pode ser variada em muitas dimensões. O espaço em que se encontra a proposição tem tantas dimensões quanto ela.

A proposição permeia todo o espaço lógico.[76] Caso contrário, a negação não seria compreensível.

INFERÊNCIA

WAISMANN: de uma proposição completa pode-se inferir uma incompleta.[77] Por exemplo, se sei que existe um certo círculo em um quadrado, também sei que existe algum círculo naquele quadrado. O que parece ser a inferência aqui? É uma tautologia? Ou existem formas de inferência que não têm a forma de tautologias?

WITTGENSTEIN: A tautologia é totalmente irrelevante. Somente em uma determinada notação a inferência se apresenta como uma tautologia. Somente as regras da sintaxe, que têm sido sempre aplicadas, muito antes de se saber o que é uma tautologia, é que são essenciais.

Uma descrição definida se parece com isto: um comprimento mede 25 m. Uma descrição indefinida seria: um comprimento está entre 20 e 30 m. Agora, estas duas descrições se tornam “p” e “q”. Então se estabelece, pela sintaxe da palavra “comprimento”,[78] que é impossível que a primeira frase seja verdadeira e a segunda falsa; isto é, »p . ~q« não é permitido. Se agora for-

74. Provavelmente “a proposição”.
75. Cf. TLP 3,328 ; 5 ,47321.
76. Cf. TLP 3,42
77. Ver, acima, p. 10s. (N. E.)
78. Sic. (N. E.)

erste Satz wahr und der zweite falsch sein kann; d. h. »p . ~q« ist unerlaubt. Bilden wir jetzt die Wahrheitsfunktion »p ⊃ q« (oder vielmehr eine Wahrheitsfunktion, die der Implikation *analog oder ähnlich* ist) und berücksichtigen wir die Forderungen der Syntax, so ergibt sich eine Tautologie.

Frege, Peano und Russell haben geglaubt, daß das »Wenn« beim Schließen eine ganz besondere Rolle spielt, und Russell hat sogar geglaubt, daß das Schließen durch die Implikation »⊃« wieder-

p	q	p ⊃ q
W	W	W
~~W~~	~~F~~	~~F~~
F	W	W
F	F	W

gegeben werde.[79] In Wirklichkeit hat das Schließen mit dem »Wenn« gar nichts zu tun. In meiner Notation[80] *zeigt* sich nun die Richtigkeit des Schlusses daran, daß »p ⊃ q« eine Tautologie wird. Aber es ist absolut unnötig, die Richtigkeit des Schlusses gerade auf diese Art zu zeigen. Ebensogut zeigt sich die Richtigkeit eines Schlusses an den üblichen Regeln des Schließens. Es ist das nur eine von verschiedenen möglichen Notationen, die vielleicht nur den Vorteil hat, daß sie die Sache klarer sehen läßt. Aber an sich leisten die Russellschen Zeichen zusammen mit den Regeln ihrer syntaktischen Verwendung dasselbe.

Daß der Schluß a priori ist, heißt nur, daß die Syntax darüber entscheidet, ob ein Schluß richtig ist oder nicht. Die Tautologie ist nur eine Art, um das Syntaktische zu zeigen.

VORTRAG ÜBER ETHIK[81]

Die Ausdrücke in der Ethik haben eine doppelte Bedeutung: eine psychologische, von der man sprechen kann, und eine nichtpsychologische: »guter Tennisspieler«, »gut«. In verschiedenen Ausdrücken deuten wir immer dasselbe an.

Erstaunen über die Tatsache der Welt. Jeder Versuch, es auszudrücken, führt zu Unsinn.

Der Mensch hat die Tendenz, gegen die Grenzen der Sprache anzurennen. Dieses Anrennen deutet auf die Ethik hin. Alles, was ich beschreibe, ist in der Welt. In der vollständigen Weltbeschreibung kommt niemals ein Satz der Ethik vor, auch wenn ich einen Mörder beschreibe. Das Ethische ist kein Sachverhalt.

WAHRSCHEINLICHKEIT I

79. Peano nennt eigentlich jeden Satz, der diese logische Konstante enthält, »une deduction« (Notations de logique mathematique, Turin, 1894, S. 10). Freges »einzige Schlußweise« bringt diese Konstante mit sich (Grundgesetze I, Jena, 1893, S. 26). Whitehead u. Russell (Principia Mathematica I, Cambridge, 1910, S. 21 ff.) halten die formalen Implikationen, die natürlich diese Konstante mit sich bringen, für Deduktionen nützlich; zusammen mit 2 Urteilstrichen wird diese Konstante benützt, um eine Inferenz auszudrücken (ebd. s. 96). (F. H.)

80. Wahrscheinlich die im unmittelbar vorhergehenden Diagramm illustrierte Notation. (F. H.)

81. Dieser schematische Bericht, mit kleinen Veränderungen, der am 2ten Januar 1930 erwähnten Vorlesung (s. oben, S. 57f und Anm.) beruht wahrscheinlich auf dem deutschen, verlorengegangenen Text. (F. H.)

marmos a função de verdade "p ⊃ q" (ou melhor, uma função de verdade *análoga ou semelhante* à implicação), e se levarmos em consideração os requisitos de sintaxe, o resultado será uma tautologia.

Frege, Peano e Russell acreditavam que o "se" desempenhava um papel muito especial na inferência, e Russell até acreditava que a inferência era representada pela implicação "⊃".[79] Na

p	q	p ⊃ q
V	V	V
~~V~~	~~F~~	~~F~~
F	V	V
F	F	V

realidade, a inferência não tem nada a ver com o "se". Em minha notação,[80] a correção da inferência se *mostra* pelo fato de que "p ⊃ q" se torna uma tautologia. Mas é absolutamente desnecessário mostrar a correção da inferência exatamente desta maneira. A correção de uma inferência também se mostra pelas regras usuais de inferência. Esta é apenas uma das várias notações possíveis, que talvez só tenha a vantagem de permitir que o assunto seja visto com mais clareza. Mas, como tal, os sinais de Russell, junto com as regras de seu emprego sintático, fazem a mesma coisa.

Que a inferência seja a priori significa apenas que a sintaxe decide se uma inferência é correta ou não. A tautologia é apenas uma forma de mostrar a sintaxe.

PALESTRA SOBRE ÉTICA[81]

Os termos éticos têm um duplo sentido: um psicológico, de que se pode falar, e outro não psicológico: "bom tenista", "bom". Sempre sugerimos a mesma coisa em diferentes expressões.

Espanto diante do fato do mundo. Qualquer tentativa de expressá-lo leva ao contrassenso.

As pessoas tendem a se chocar contra os limites da linguagem. Este ir de encontro indica a ética. Tudo o que descrevo está no mundo. Na descrição completa do mundo nunca ocorre uma proposição da ética, mesmo quando descrevo um assassino. O ético não é um estado de coisas.

PROBABILIDADE I

79. Na verdade, Peano chama toda proposição que contém esta constante lógica de "une déduction" (*Notations de logique mathematique*, Turin, 1894, p. 10). O "único modo de inferência" de Frege traz consigo esta constante (*Grundgesetze* I, Jena, 1893, p. 26). Whitehead e Russell (*Principia Mathematica* I, Cambridge, 1910, pp. 21ss.) consideram as implicações formais que esta constante naturalmente acarreta úteis para deduções; esta constante é usada junto com 2 linhas de juízo para expressar uma inferência (ibid. p. 96). (N. E.)

80. Provavelmente a notação ilustrada pelo diagrama imediatamente precedente. (N. E.)

81. Este informe esquemático, com pequenas mudanças, da palestra mencionada em 2 de janeiro de 1930 (ver acima, pág. 58s e nota) é provavelmente baseado no texto perdido em alemão. (N. E.)

Die erste Frage ist die: Wenn ich beim Werfen mit einer Münze sage, es sei gleich wahrscheinlich, Kopf oder Wappen zu werfen - ist das Prophezeiung?

Wenn es eine Prophezeiung wäre, dann müßte sie sich durch die Erfahrung bestätigen oder widerlegen lassen. Aber es ist klar, daß es keine Möglichkeit gibt, die Aussage über Wahrscheinlichkeit zu verifizieren. Was immer geschieht, stets kann ich die Aussage von der gleichen Wahrscheinlichkeit aufrechterhalten. Was bedeutet aber dann eine Wahrscheinlichkeitsaussage?

Wenn ich sage, es sei gleich wahrscheinlich, mit einer Münze Kopf oder Wappen zu werfen, so meine ich: Ich weiß nicht, ob Kopf oder Wappen fallen wird; aber alle mir bekannten Umstände (alles, was ich über die Münze weiß, alles, was ich über den Vorgang des Werfens weiß, die Fallgesetze und so weiter) geben für das Auffallen des Kopfes nicht mehr Grund als für das Auffallen des Wappens.

Die Wahrscheinlichkeit ist eine Form der Beschreibung. Es gibt eine Form die Wirklichkeit zu beschreiben, nämlich die Wahrscheinlichkeit, so wie es etwa Naturgesetze von der Minimum-Form gibt.

Meine Auffassung über die Wahrscheinlichkeit muß jetzt eine andere sein, weil sich meine Auffassung der Elementarsätze von Grund auf geändert hat. Die Wahrscheinlichkeit ist eine interne Beziehung zwischen Sätzen.

Was ich durch den Versuch verifiziere, ist niemals die Richtigkeit der *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, sondern die *Voraussetzungen*, die ich zugrunde gelegt habe.

So wenig wie der Physiker durch seine Experimente die Richtigkeit seiner logischen Schlüsse kontrolliert, sondern die Wahrheit der Hypothesen, von welchen er ausgegangen ist, so wenig läßt sich durch Erfahrung die Richtigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestätigen oder widerlegen.

[Die Wahrscheinlichkeit hat es nur mit der Form der Aussagen zu tun. Es gibt keinen Gegenstand »die Wahrscheinlichkeit«.

Die Aussagen über die Wahrscheinlichkeit beschreiben nicht die Wahrscheinlichkeit, sondern sie bedienen sich der Wahrscheinlichkeitsform, um die Wirklichkeit zu beschreiben. Die Wahrscheinlichkeit wird dann gebraucht, wenn unsere Beschreibung der Sachverhalte unvollständig ist. Die Wahrscheinlichkeit hängt mit dem Wesen einer unvollständigen Beschreibung zusammen.]

Ein ganz anderer Fall liegt vor bei den Fällen der Versicherung: Hier handelt es sich um Wahrscheinlichkeit a posteriori. Das hat überhaupt nichts mit Wahrscheinlichkeit zu tun. [?]

Was wird denn eigentlich ausgesagt, wenn es heißt, ein 40jähriger habe die und die Wahrscheinlichkeit, 60 Jahre alt zu werden? Hier haben wir eine statistische Aussage: Von so und so viel 40jährigen sind so und so viele 60 Jahre alt geworden. Heißt es, daß auch in Zukunft derselbe Prozentsatz 60 Jahre alt werden wird? Das heißt es nicht. Wohl aber baut die Versicherungsgesellschaft darauf, daß die Berechnung auch für die Zukunft stimmen werde. Aber das ist einfach *Induktion*, genau so gut wie beim Naturgesetz. Eine Wahrscheinlichkeit für diese Induktion läßt sich nicht angeben und hätte keinen Sinn.

Die Versicherungsgesellschaften prophezeien, und zwar muß ihre Aussage, wenn sie überhaupt einen Sinn haben soll, *in bestimmter Weise* zu verifizieren sein. Sie muß sagen: In den nächsten 70 Jahren, oder in den nächsten 10 Jahren, werden so und so viele Menschen sterben. Wird das nicht angegeben, so verliert die Aussage jeden Sinn.

Wenn eine Abweichung eintritt, so sagt man: Da gilt unsere Statistik nicht. In dem Jahr war Krieg, da war die Pest, und so weiter. Würde aber eine Abweichung eintreten, ohne daß sich ein solcher Faktor angeben ließe, so kann man doch die Zeit selbst dafür verantwortlich machen.

A primeira pergunta é: se eu disser, ao jogar uma moeda, que é igualmente provável que a jogada seja cara ou coroa - isto é uma profecia?

Se fosse uma profecia, a experiência teria que confirmá-la ou refutá-la. Mas é claro que não há como verificar a afirmação sobre probabilidade. Aconteça o que acontecer, posso sempre manter a afirmação da mesma probabilidade. Mas então o que significa um enunciado de probabilidade?

Quando digo que é igualmente provável que se jogue cara ou coroa com uma moeda, quero dizer: não sei se vai cair cara ou coroa; mas todas as circunstâncias que conheço (tudo que sei sobre a moeda, tudo que sei sobre o processo de lançá-la, as leis da queda e assim por diante) não dão, para destacar a cara, mais razão do que para destacar a coroa.

A probabilidade é uma forma de descrição. Existe uma forma de descrever a realidade, a saber, a probabilidade, assim como existem leis naturais da forma mínima.

Minha visão da probabilidade agora tem que ser diferente, porque minha concepção das proposições elementares mudou fundamentalmente. Probabilidade é uma relação interna entre proposições.

O que verifico por meio do experimento nunca é a correção do cálculo da probabilidade, mas as *pressuposições* que tomei como base.

Assim como o físico não verifica a exatidão de suas inferências lógicas por meio de seus experimentos, mas a verdade das hipóteses das quais partiu, da mesma forma a correção do cálculo de probabilidade tampouco pode ser confirmada ou refutada pela experiência.

[A probabilidade só tem a ver com a forma dos enunciados. Não há um objeto “probabilidade”.

Os enunciados de probabilidade não descrevem a probabilidade, mas usam a forma da probabilidade para descrever a realidade. A probabilidade é usada quando nossa descrição dos estados de coisa é incompleta. A probabilidade está relacionada à natureza de uma descrição incompleta.]

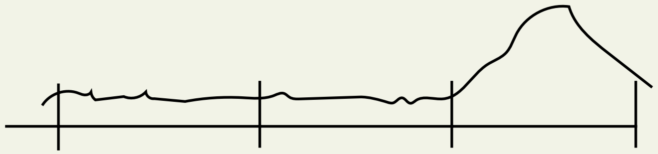
O caso do seguro é um caso completamente diferente: esta é uma probabilidade a posteriori. Não tem nada a ver com probabilidade. [?]

O que é realmente dito quando se diz que uma pessoa de 40 anos tem a probabilidade de vir a ter 60 anos? Aqui temos um enunciado estatístico: de tantos e tantos com 40 anos, muitos chegarão a ter 60 anos. Isto significa que a mesma porcentagem viverá até os 60 anos no futuro? Não significa isto. A companhia de seguros, no entanto, confia no fato de que o cálculo valerá também para o futuro. Mas isto é simplesmente *indução*, tão boa quanto numa lei natural. Não pode ser dada uma probabilidade para esta indução, e nem teria qualquer sentido.

As companhias de seguro profetizam, e seus enunciados, especificamente, para ter algum sentido, devem ser verificáveis *de uma maneira determinada*. Eles têm que dizer: nos próximos 70 anos, ou nos próximos 10 anos, tantas e tantas pessoas morrerão. Se isto não for especificado, o enunciado perde todo o sentido.

Se houver um desvio, diz-se: nossas estatísticas não se aplicam aqui. Este ano houve guerra, houve peste, e assim por diante. Mas se um desvio ocorresse sem que tal fator pudesse ser especificado, pode-se culpar o próprio tempo por isto. (Dizendo-se, por exemplo, que a cada 1930 anos após um grande fundador religioso, a taxa de mortalidade se desvia de tal e tal forma. Tudo o que pode ser descrito também pode ser visto como a causa de um desvio.)

(Indem man z. B, sagt, alle 1930 Jahre nach einem großen Religionsstifter weicht die Sterblichkeit so und so ab. Alles, was man beschreiben kann, kann man auch als Ursache für eine Abweichung ansehen.)



Würfel

Was heißt es, es treten systematische Abweichungen von der Wahrscheinlichkeit 1/6 auf?

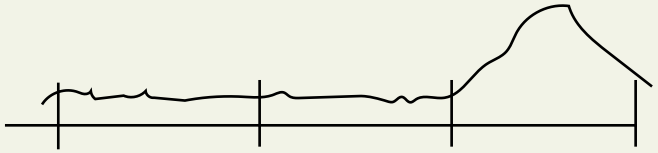
Erstens müssen wir uns klar machen, daß wir beim Würfel ein ungeheures System der Erfahrung voraussetzen, nämlich, daß die auf den Seiten aufgeschriebenen Zahlen einflußlos sind für das Resultat. Machen wir etwa folgenden Versuch: Die beiden Seiten einer Münze bekleben wir mit Zeichen, von welchen wir vorher durch Abwägungen festgestellt haben, daß sie gleich schwer sind. Dann können wir feststellen, daß sich im Fall nichts ändert, welche Zeichen wir auch aufkleben. (Hätten wir andere Erfahrungen gemacht, so würden wir den Ansatz bei der Wahrscheinlichkeit auch ganz anders machen müssen.)

Das Auftreffen des Würfels auf eine der sechs Flächen hängt also nicht davon ab, welche Zahl darauf geschrieben ist. Treten nun systematische Abweichungen der relativen Häufigkeit von dem errechneten W ahrscheinlichkeitswert auf, so stellen wir quasi das *Postulat* auf: Es müssen sich noch weitere Ursachen finden lassen, und zwar so viele, daß ihre Hinzufügung zu dem System der uns bekannten Sätze gerade die Wahrscheinlichkeit hervorbringt. Wir beruhigen uns erst, wenn die relative Häufigkeit übereinstimmt mit der Wahrscheinlichkeit a priori.

Die weiteren Umstände, die wir einführen, dürfen nicht den Charakter ad hoc ersonnener Annahmen haben. Wohl aber müssen wir eine Festsetzung über gleiche Wahrscheinlichkeit treffen.[82]

Von »allen Sätzen« kann man nur sprechen, wenn man eine *Methode* hat, diese Sätze zu konstruieren.

82. Es folgen ein Diagramm über Lichtstrahlen und eine halbe freie Seite. (F. H.)



Dados

O que significa dizer que ocorrem desvios sistemáticos da probabilidade 1/6?

Em primeiro lugar, temos que deixar claro para nós mesmos que com os dados pressupomos um tremendo sistema de experiência, a saber, que os números escritos nas superfícies não têm influência no resultado. Vamos fazer, por exemplo, a seguinte experiência: afixamos sinais em ambos os lados de uma moeda, cujos pesos determinamos previamente que são iguais. Então podemos estabelecer que neste caso nada muda sejam quais forem os sinais que nela colamos. (Se nossas experiências tivessem sido diferentes, teríamos que adotar a abordagem da probabilidade de maneira completamente diferente.)

Que o dado caia em uma das seis faces não depende de qual número está escrito nela. Se houver desvios sistemáticos da frequência relativa do valor de probabilidade calculado, é como se tivéssemos que fazer o *postulado*: tem que haver mais causas a serem encontradas, e, particularmente tantas quantas a sua adição ao sistema de proposições conhecidas produza exatamente esta probabilidade. Só nos acalmamos quando a frequência relativa concorda com a probabilidade a priori.

As circunstâncias adicionais que introduzimos não devem ter o caráter de suposições planejadas ad hoc. Mesmo que tenhamos que fazer uma estipulação sobre a equiprobabilidade.[82]

Só se pode falar de “todas as proposições” quando se tem um *método* para construir tais proposições.

82. Segue-se um diagrama sobre raios de luz e uma página e meia em branco. (N. E.)

22. März 1930 (bei Schlick)

⟨VERIFIKATION UND DAS UNMITTELBAR GEGEBENE⟩

Wie verifiziere ich den Satz: »Dies ist gelb«?

Zunächst ist klar: »Dies«, das gelb ist, muß ich wieder erkennen können, auch wenn es rot ist. (Würde »dies« und »gelb« eine Einheit bilden, so könnten sie durch *ein* Symbol dargestellt werden, und wir hätten keinen Satz.)

Die Vorstellung »gelb « ist nicht ein Bild des gesehenen Gelb in dem Sinn, wie ich etwa ein Bild meines Freundes in meiner Brieftasche bei mir trage. Sie ist ein »Bild« in einem ganz anderen, formalen Sinn. Ich kann sagen: »Denken Sie sich ein Gelb; lassen Sie es jetzt weißlicher werden, bis es ganz weiß ist, und lassen Sie es nun in Grün übergehen.« Ich kann dadurch Ihre Vorstellungen dirigieren, und zwar wandelt sich diese in derselben Weise ab wie die wirklichen Farbeindrücke. Ich kann an den Vorstellungen alle Operationen ausführen, die der Wirklichkeit entsprechen. *Die Vorstellung der Farbe hat dieselbe Multiplizität wie die Farbe*. Darin besteht ihr Zusammenhang mit der Wirklichkeit.

Sage ich nun: »Dies ist gelb«, so kann ich das auf ganz verschiedene Weise verifizieren. Je nach der Methode, die ich dabei als Verifikation zulasse, hat der Satz einen ganz verschiedenen Sinn. Wenn ich z. B. eine chemische Reaktion als Mittel der Verifikation zulasse, so hat es einen Sinn zu sagen: »Dies sieht *grau* aus, aber in Wirklichkeit ist es *gelb*.« Lasse ich aber als Verifikation das gelten, was ich sehe, so hat es keinen Sinn mehr zu sagen : »Dies sieht gelb aus, ist aber nicht gelb.« Jetzt kann ich nicht mehr nach einem *Anzeichen* dafür suchen, daß dies gelb ist, sondern dies ist die Tatsache selbst; ich bin bis zu dem letzten Punkt vorgedrungen, über den man nicht mehr weiter vordringen kann. In bezug auf das unmittelbar Gegebene darf ich keine *Hypothesen* machen.

⟨*Verifikation und Zeit*⟩

So wie mit der Farbe ist es auch mit der Zeit. Das Wort »Zeit« bedeutet wieder ganz Verschiedenes: die Zeit meiner Erinnerung, die Zeit der Aussagen eines andern Menschen, die physikalische Zeit.

Meine Erinnerungen sind geordnet. *Die Art, wie die Erinnerungen geordnet sind, ist die Zeit*. Die Zeit ist also unmittelbar mit der Erinnerung gegeben. Die Zeit ist quasi die Form, in der ich Erinnerungen habe.

Eine Ordnung kann auch auf andere Weise erreicht werden, z. B. durch Aussagen, die ich oder ein anderer machen. Sage ich z. B.: »Dieses Ereignis war früher, jenes später«, so ist das eine ganz andere Ordnung. Beide Arten der Ordnung können sich vereinigen, so z. B., wenn ich von dem großen Brand spreche, von dem ich in meiner Kindheit erzählen hörte. Hier überlagert sich gleichsam die Zeit der Erinnerung und die Zeit der Aussagen. Noch komplizierter steht es mit Aussagen der Geschichte oder mit der Zeit der Geologie. Hier hängt der Sinn der Zeitanga-

22 de Março de 1930 (na casa de Schlick)

⟨VERIFICAÇÃO E O IMEDIATAMENTE DADO⟩

Como verifico a proposição “Isto é amarelo”?

Em primeiro lugar, é claro: tenho que ser capaz de reconhecer “isto”, que é amarelo, mesmo que seja vermelho. (Se “isto” e “amarelo” formassem uma unidade, eles poderiam ser representados por *um* símbolo e não teríamos nenhuma proposição.)

A representação de “amarelo” não é uma imagem do amarelo visto no sentido de que, por exemplo, carrego comigo uma foto do meu amigo na carteira. É uma “imagem” em um sentido formal completamente diferente. Posso dizer: “Imagine um amarelo; agora vá enbranquecendo--o até ficar completamente branco, e agora deixe-o ficar verde”. Mediante isto posso direcionar suas representações, e, particularmente, elas mudam da mesma forma que as impressões de cores reais. Posso realizar nas representações todas as operações que correspondem à realidade. *A representação de cor tem a mesma multiplicidade que a cor*. Nisto consiste a sua conexão com a realidade.

Se disser agora: “Isto é amarelo”, posso verificá-lo de várias maneiras diferentes. Dependendo do método que permito como verificação, a proposição tem um sentido completamente diferente. Se permito, por exemplo, uma reação química como meio de verificação, faz sentido dizer: “Parece *cinza*, mas na realidade é *amarelo*.” Mas se eu aceitar o que vejo como verificação, então não faz mais sentido dizer: “Isto parece amarelo, mas não é amarelo.” Agora não posso mais procurar um *indício* de que isto é amarelo, senão que este é o fato em si; cheguei ao último ponto além do qual não se pode mais prosseguir. Em relação ao que é dado imediatamente, não posso fazer *hipóteses*.

⟨*Verificação e Tempo*⟩

Tal como acontece com a cor, também acontece com o tempo. A palavra “tempo” significa coisas muito diferentes: o tempo da minha memória, o tempo dos enunciados de outra pessoa, o tempo físico.

Minhas memórias estão ordenadas. *O modo como as memórias estão ordenas é o tempo*. O tempo é, portanto, dado imediatamente com a memória. O tempo é basicamente a forma na qual tenho memórias.

Uma ordenação também pode ser obtida de outras maneiras, por exemplo por meio de enunciados que eu ou outra pessoa fazemos. Se digo, por exemplo: “Este evento foi antes, aquele depois”, esta é uma ordenação completamente diferente. Ambos os tipos de ordenação podem se combinar quando falo, por exemplo, sobre o grande incêndio de que ouvi falar na minha infância. Aqui o tempo da memória e o tempo dos enunciados se sobrepõem, por assim dizer. É ainda mais complicado com enunciados da história ou com o tempo da geologia. Aqui, o sentido be ganz davon ab, was man als Verifikation zuläßt.

WAHRSCHEINLICHKEIT II

Die »Wahrscheinlichkeit« kann zwei ganz verschiedene Bedeutungen haben:
1. Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses;
2. Wahrscheinlichkeit der Induktion.

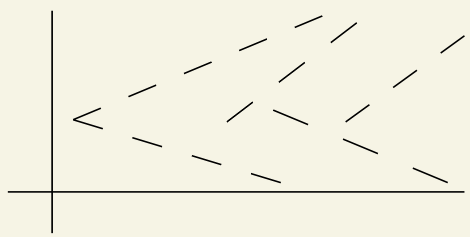
Im letzteren Sinn bedeutet es die Unbequemlichkeit, die es mir machen würde, diese Induktion aufzugeben.

Es ist eine Erfahrungstatsache: Wenn ich mit einem Würfel 100mal werfe, kommt eine 1 vor. Wenn ich nun 99mal geworfen habe und keine 1 vorgekommen ist, so werde ich sagen: Höchste Zeit, daß eine 1 vorkommt; ich wette, daß jetzt eine 1 kommt. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung sagt, daß dieser Schluß nicht berechtigt ist. Ich glaube, daß er doch berechtigt ist: Es ist nämlich sehr »wahrscheinlich«, daß jetzt eine 1 kommt, aber wahrscheinlich nicht im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern im Sinne der Wahrscheinlichkeit einer Induktion. Auf der unklaren Vermengung dieser beiden Wahrscheinlichkeitsbegriffe beruht eine ganze Reihe von Mißverständnissen (Es wird eine Zeit kommen, wie sich von selbst Temperaturverschiedenheiten einstellen und so weiter.)

Würde eine Abweichung von der gewohnten Verteilung vorkommen, so würden wir uns sehr wundern. Maschinen zum Mischen von Schokolade, Mandeln und Rosinen. Jeder erwartet, daß in seinem Stück Mandeln und Rosinen sind, und wenn nicht, so würde die Fabrik sofort die Maschine untersuchen lassen. Die Wahrscheinlichkeit im täglichen Leben bedeutet die Wahrscheinlichkeit der Induktion. Diese ist *nicht meßbar*, wenigstens nicht in demselben Sinn, wie die Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung meßbar ist.[1] [Vielleicht überhaupt nicht mit Zahlen im gewöhnlichen Sinn?]

HYPOTHESEN I

Unterscheidungen zwischen »Aussagen« und »Hypothesen«: Eine Hypothese ist keine Aussage, sondern ein Gesetz zur Bildung von Aussagen.



Lichtpunkte

Was wir beobachten, sind immer nur die »Schnitte« durch das zusammenhängende Gebilde,

1. Wir können wohl sagen, daß ein Naturgesetz, das sich öfters bewährt hat, wahrscheinlich plausibler ist als ein anderes; aber wir haben kein Meßmittel, diesen Unterschied in Zahlen auszudrücken. (A. W.)

do tempo depende inteiramente do que é permitido como verificação.

PROBABILIDADE II

A “probabilidade” pode ter dois significados completamente diferentes:
1. a probabilidade de um evento;
2. a probabilidade da indução.

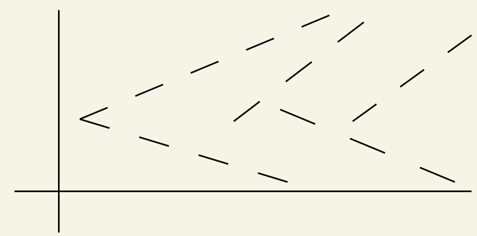
Neste último sentido significa o inconveniente que me faria desistir desta indução.

É um fato da experiência: se eu jogar um dado 100 vezes, haverá um 1. Se joguei 99 vezes e nenhum 1 ocorreu, vou dizer: já está na hora de ocorrer um 1; aposto que haverá um 1 agora. O cálculo de probabilidade diz que esta conclusão não se justifica. Acredito, porém, que se justifica: é muito “provável” que um 1 venha agora, mas provavelmente não no sentido do cálculo de probabilidade, senão no sentido da probabilidade de uma indução. Toda uma série de mal-entendidos se baseia na confusa mistura destes dois conceitos de probabilidade (chegará um momento em que as diferenças de temperatura se ajustarão automaticamente, e assim por diante).

Se houvesse um desvio da distribuição usual, ficaríamos muito surpresos. Máquinas para misturar chocolate, amêndoas e passas. Todo mundo espera que seu pedaço tenha amêndoas e passas, caso contrário a fábrica mandaria verificar a máquina imediatamente. A probabilidade na vida diária significa a probabilidade da indução. Isto não pode ser medido, pelo menos não no mesmo sentido em que a probabilidade do cálculo da probabilidade é mensurável.[1] [Talvez nem um pouco com os números no sentido comum?]

HIPÓTESES I

Distinções entre “enunciados” e “hipóteses”: uma hipótese não é um enunciado, mas uma lei para a formação de enunciados.

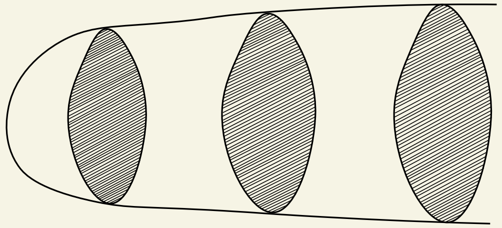


Pontos de luz

O que observamos são sempre apenas os “cortes” na estrutura conectada que a lei represen-

1. Podemos dizer que uma lei da natureza que se comprovou repetidas vezes é provavelmente mais plausível do que outra; mas não temos meios de medir esta diferença em números. (N. W.)

das das Gesetz darstellt.



Ein Naturgesetz läßt sich nicht verifizieren und nicht falsifizieren. Vom Naturgesetz kann man sagen, daß es weder wahr noch falsch, sondern »wahrscheinlich« ist, und »wahrscheinlich« bedeutet dabei: einfach, bequem. Eine Aussage ist wahr oder falsch, nie wahrscheinlich. Was wahrscheinlich ist, ist keine Aussage.

Sinn der physikalischen Aussagen:[2] Sie verweisen auf die Zukunft ad infinitum. Sie gelten nie als bewiesen; man behält sich immer vor, sie fallen zu lassen oder abzuändern, im Gegensatz zu einer wirklichen Aussage, deren Wahrheit nicht wieder abgeändert werden kann.

Doppelte Bedeutung der Geometrie

Die Geometrie des Gesichtsraums ist die Grammatik der Aussagen über die Gegenstände im Gesichtsfeld. Man kann nicht sagen: Diese Geometrie ist plausibel.

Die Geometrie des physikalischen Raumes ist etwas ganz anderes. Man kann sie plausibel (wahrscheinlich) machen. Sie steht auf derselben Ebene wie die Naturgesetze. Sie ist ein Teil der physikalischen Beschreibung und kann geändert werden.

»Diese Fläche ist ein Zylinder« ist eine Hypothese.

⟨*Verschiedenes über Hypothesen*⟩

Wenn ich ein bräunliches Ei finde und sage: »Dieses Ei stammt von einer Lerche«, so ist diese Aussage nicht verif⟨izierbar⟩. Ich bilde vielmehr die Hypothese des eierlegenden Vogels.

In der Hypothese kommt die *mathematische* Induktion vor. Zusammenhang mit dem Raum-Zeit-System, mit der Mathematik.

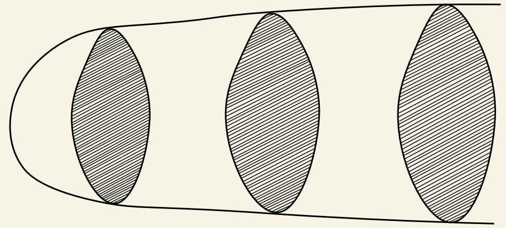
Logik der Hypothese:[3] Was heißt es, zwei Hypothesen widersprechen einander? Der Widerspruch zw{schen zwei Sätzen geht zurück auf den Widerspruch zwischen Aussagen, die ihr Resultat sind.

Eine physikalische Gleichung versteht man erst, wenn man die Projektionsmethode kennt, welche den Zahlen Sätze zuordnet. Die Gleichungen sind bezogen auf ein System von Sätzen, in welchen Zahlen auftreten.

S = 2W; S bezieht sich auf einen Satz, W ebenso.

2. Der Sinn einer physikalischen Aussage ist nicht durch die Beobachtung erschöpft. (A. W.)
3. Wenn die Geometrie widerspruchsvoll ist, so bedeutet das: Sie führt zur Aufstellung von Aussagen, die Kontradiktionen sind. (A. W.)

ta.



Uma lei da natureza não pode ser verificada ou falsificada. Pode-se dizer que a lei da natureza não é verdadeira nem falsa, mas “provável”, e “provável” significa: simples, conveniente. Um enunciado é verdadeiro ou falso, nunca provável. O que é provável não é um enunciado.

Sentido dos enunciados físicos:[2] eles se referem ao futuro ad infinitum. Eles nunca são considerados provados; sempre se reserva o direito de abandoná-los ou modificá-los, em contraste com um enunciado real cuja verdade não pode ser submetida a modificação.

Duplo Significado da Geometria

A geometria do espaço visual é a gramática das afirmações sobre os objetos no campo visual. Não se pode dizer: esta geometria é plausível.

A geometria do espaço físico é algo completamente diferente. Você pode (provavelmente) torná-la plausível. Ela está no mesmo nível que as leis da natureza. Faz parte da descrição física e pode ser modificada.

“Esta superfície é um cilindro” é uma hipótese.

⟨*Várias Observações sobre Hipóteses*⟩

Se eu encontrar um ovo amarronzado e disser: “Este ovo vem de uma cotovia”, este enunciado não é verif⟨icável⟩. Em vez disto, estou formulando uma hipótese sobre a ave poedeira.

A indução *matemática* ocorre na hipótese. Conexão com o sistema espaço-temporal, com a matemática.

Lógica da hipótese:[3] o que significa duas hipóteses se contradizendo? A contradição entre duas proposições remonta à contradição entre enunciados que são o seu resultado.

Só se entende uma equação da física quando se conhece o método de projeção, que correlaciona proposições a números. As equações estão relacionadas a um sistema de proposições em que aparecem números.

S = 2W; S se refere a uma proposição, W também.

A física constrói um sistema de hipóteses apresentado como um sistema de equações. As equações da física não podem ser verdadeiras nem falsas. Apenas os resultados da verificação

2. O sentido de um enunciado físico não se esgota com a observação (N. W.)
3. Se a geometria é contraditória, isto significa: ela leva ao estabelecimento de enunciados contraditórios. (N. W.)

Die Physik konstruiert ein System von Hypothesen, dargestellt als ein System von Gleichungen. Die Gleichungen der Physik können weder wahr noch falsch sein. Wahr und falsch sind nur die Befunde bei der Verifikation, d. h. die phän⟨omenologischen⟩ Aussagen. *Physik ist nicht Geschichte*. Sie prophezeit. Wollte man die Physik lediglich als einen Bericht über die bisher beobachteten Tatsachen auffassen, so würde ihr das Wesentlichste fehlen, die Beziehung auf die Zukunft. Sie wäre wie die Erzählung eines Traumes.

Die Aussagen der Physik sind nie abgeschlossen. Unsinn, sie als abgeschlossen zu denken.

Ich trete vor das Haus und sehe, daß ich auf der Ringstraße bin.[4] Was würde ich tun?

Hypothese als Postulat. Konvention.

Herr Waismann und sein Bruder.[5] Ich würde z. B. sagen: Das ist ja nicht der Herr Waismann; es ist nur sein Bruder, der ihm sehr ähnlich sieht.

4. Weder Schlicks Wohnung noch Wittgensteins Familienhaus waren in der Ringstraße zur Zeit dieser Konversation. (F. H.)

5. Waismann hatte keinen Bruder. (F. H.)

são verdadeiros e falsos, isto é, os enunciados fen⟨omenológicos⟩. *A física não é história*. Ela profetiza. Se alguém quisesse conceber a física apenas como um informe sobre os fatos observados até agora, então o mais essencial estaria faltando, a relação com o futuro. Seria como o relato de um sonho.

Os enunciados da física nunca são completos. É um contrassenso pensar neles como completos.

Saio para a frente da casa e vejo que estou na Ringstraße.[4] O que faria?

Hipótese como um postulado. Convenção.

O Sr. Waismann e seu irmão.[5] Eu diria, por exemplo: esse não é o Sr. Waismann; é apenas seu irmão que se parece muito com ele.

4. Nem o apartamento de Schlick nem a casa da família de Wittgenstein ficavam na Ringstraße no momento desta conversa. (N. E.)

5. Waissmann não tinha irmãos. (N. E.)

19. Juni 1930 (bei Schlick)

⟨WAS IN KÖNIGSBERG ZU SAGEN WÄRE⟩

WITTGENSTEIN führt aus, was in Königsberg zu sagen wäre:[1] In der Logik gibt es keine Begriffe. Was so ausschaut wie ein Begriff ist eine Kapitelüberschrift in der Grammatik. Wenn man z.B . von verschiedenen Zahlenarten spricht, so hat man es nicht mit verschiedenen Begriffen zu tun. Wir haben nicht *einen* Begriff der Zahl, der in verschiedene Unterbegriffe zerfällt. Die Zahlen zerfallen nicht in Subklassen, sondern wir haben verschiedene Wortarten vor uns, etwa so, wie die Grammatik Substantiva, Adjektiva, Verba etc. unterscheidet. Zwischen der Syntax der verschiedenen Zahlenarten bestehen gewisse Ähnlichkeiten, und deshalb nennt man sie alle Zahlen.

Eine Klasse kann nicht endlich oder unendlich sein. Die Wörter »endlich« und »unendlich« bedeuten keine nachträgliche Bestimmung zu »Klasse«. Sie sind keine Adjektiva.

Es gibt in der Logik nicht den Gegenstand und die Beschreibung des Gegenstandes. Man pflegt z. B. zu sagen: » Wir können allerdings nicht alle Zahlen einer Menge aufzählen, aber wir können eine Beschreibung geben.« Das ist Unsinn. Man kann nicht eine Beschreibung an Stelle der Aufzählung geben. Das eine ist kein Ersatz für das andere. Was wir geben können, können wir geben. Wir können nicht von hinten herum zum selben Ziel kommen.

Mit dem Dirichletschen Funktionsbegriff[2] fängt die Mengenlehre an. Die Funktion wird hier als eine Zuordnung aufgefaßt. Unter Zuordnung stellt sich der normale Mensch eine Liste vor. Plötzlich hört die Liste auf, und es wird ein Gesetz gegeben. Das Gesetz ist nicht eine andere Methode, das zu geben, was die Liste gibt. Was das Gesetz gibt, *kann* die Liste nicht geben. Es ist keine Liste mehr denkbar. Wir haben es tatsächlich mit zwei absolut verschiedenen Dingen zu tun. Es wird immer so getan, als ob das eine indirekte Methode des andern wäre. Ich könnte zwar die Liste geben; aber weil das zu kompliziert ist oder über meine Kräfte geht, gebe ich das Gesetz. Das klingt so, wie wenn ich sage: Bisher habe ich mit Ihnen gesprochen; wenn ich in England bin, muß ich Ihnen schreiben.

Nichts ist verdächtiger als eine zu große Allgemeinheit. Dedekind tut bei der Definition des Unendlichen so, als wenn er noch gar nicht wüßte, daß er es hinterher mit *Zahlen* zu tun haben

1. Nach der Einführung von McGuinness (Wittgenstein, 1984, S. 19-20) sollte Wittgensteins Ausführung einen Vortrag von Waissmann vorbereiten, der in Königsberg im Rahmen einer „Zweiten Konferenz über Erkenntnistheorie für die exakten Wissenschaften" gehalten werden sollte in 1930. Der Titel des Vortrags lautete „Das Wesen der Mathematik: Wittgensteins Standpunkt", wurde jedoch in der Konferenz gewidmeten Ausgabe von *Erkenntnis* 2 (1931) nicht veröffentlicht, da Waissmanns Manuskript nie bei den Herausgebern ankam. (A. U.)

2. P. Lejeune-Dirichlet wird gewöhnlich die erste Formulierung des allgemeinen Begriffs einer Reellvariablenfunktion zugeschrieben; s. seine *Werke* Bd. I, Berlin, 1889, S. 1 3 2 u. 1 3 5 . H. Hankels Formulierung des Dirichletsbegriffs (*Mathematische Annalen* XX, 1882, S. 67) lautet: »Eine Funktion heißt *y* von *x*, wenn jedem Werthe der veränderlichen Größe *x* innerhalb eines gewissen Intervalles ein bestimmter Werth von *y* entsteht, gleichviel ob *y* in dem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von *x* abhängt oder nicht ; ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht.« (F. H.)

19 de Junho de 1930 (na casa de Schlick)

⟨O QUE DIZER EM KÖNIGSBERG⟩

WITTGENSTEIN expressa o que teria que ser dito em Königsberg:[1] não existem conceitos em lógica. O que parece um conceito é um título de capítulo na gramática. Quando se fala, por exemplo, de diferentes tipos de números, não estamos lidando com conceitos diferentes. Não temos *um* conceito de número que se decompõe em diferentes subconceitos. Os números não se dividem em subclasses, mas temos diferentes tipos de palavras à nossa frente, muito parecido com a maneira como a gramática distingue entre substantivos, adjetivos, verbos etc. Existem certas semelhanças entre a sintaxe dos diferentes tipos de números e, por isto, todos são chamados de números.

Uma classe não pode ser finita ou infinita. As palavras "finito" e "infinito" não significam uma definição subsequente de "classe". Elas não são adjetivos.

Na lógica, não existe o objeto e a descrição do objeto. Cuida-se, por exemplo, de dizer: "Não podemos enumerar todos os números de um conjunto, mas podemos dar uma descrição." Isto é contrassenso. Não se pode fornecer uma descrição em vez da enumeração. Um não é um substituto do outro. O que podemos dar, podemos dar. Não podemos chegar ao mesmo objetivo pela porta dos fundos.

A teoria dos conjuntos começa com o conceito de função de Dirichlet.[2] A função é entendida aqui como uma correlação. Uma pessoa normal imagina uma correlação como uma lista. De repente, a lista se encerra e uma lei é aprovada. A lei não é outro método de fornecer o que a lista oferece. O que a lei dá, a lista não *pode* dar. Uma lista não é mais concebível. De fato, estamos lidando com duas coisas completamente diferentes. Sempre se finge que este é um dos métodos indiretos do outro. Eu poderia fornecer a lista; mas porque isso é muito complicado ou além das minhas forças, forneço a lei. Isto soa como quando digo: falei com você até agora; quando estiver na Inglaterra, tenho que escrever para você.

Nada é mais suspeito do que uma grande generalização. Ao definir o infinito, Dedekind age como se nem soubesse que depois terá que lidar com *números*.[3] Talvez a definição também sirva para os leões! Tudo isto é um absurdo. Temos que ser claros: não podemos nos preparar para

1. Segundo a observação editorial de McGuinness (Wittgenstein, 1984, pp. 19-20), a exposição de Wittgenstein tinha como objetivo preparar uma preleção de Waissmann a ser dada em Königsberg, durante a "Segunda Conferência em Teoria do Conhecimento para as Ciências Exatas", ocorrida em 1930. O título da preleção foi "A Natureza da Matemática: o Ponto de Vista de Wittgenstein", no entanto ela não foi publicada pela edição da *Erkenntnis* 2 (1931), dedicada à Conferência, porque o manuscrito de Waissmann nunca chegou aos editores. (N. T.)

2. A primeira formulação do conceito geral de uma função variável real é geralmente atribuída a P. Lejeune-Dirichlet; cf. *Werke*, Vol. I, Berlin, 1889, pp. 132 e 135. A formulação de H. Hankel do conceito de Dirichlet (*Mathematische Annalen* XX, 1882, p. 67) diz: "Uma função é chamada de *y* de *x* se cada valor da variável *x* surgir dentro de um determinado intervalo de um determinado valor de *y*, independentemente de *y* ser dependente de *x* de acordo com a mesma lei dentro de todo o intervalo ou não; e de a dependência de *y* poder ser expressa por operações matemáticas ou não. " (N.E.)

3. Ver acima a nota da p. 50. (N. E.)

werde.[3] Vielleicht wird die Definition auch auf Löwen passen! All das ist Unsinn. Man muß sich klar machen: Auf eine logische Form kann man sich nicht vorbereiten. Man kann nicht die Eigenschaften einer Form studieren und sich denken: Wenn wir einmal auf eine solche Form treffen, dann sind wir schon vorbereitet.

Formalismus

Etwas am Formalismus ist richtig und etwas ist falsch.

Die Wahrheit am Formalismus ist die, daß sich jede Syntax als ein System von Spielregeln auffassen läßt. Ich habe darüber nachgedacht, was Weyl wohl meinen kann, wenn er sagt, der Formalist fasse die Axiome der Mathematik wie die Regeln des Schachspiels auf.[4] Ich möchte sagen: Nicht nur die Axiome der Mathematik, sondern alle Syntax ist willkürlich.

Man hat mich in Cambridge gefragt, ob ich denn glaube, daß es die Mathematik mit den Tintenstrichen auf dem Papier zu tun habe.[5] Darauf antworte ich : In genau demselben Sinn, wie es das Schachspiel mit den Holzfiguren zu tun hat. Das Schachspiel besteht nämlich nicht darin, daß ich Holzfiguren auf Holz herumschiebe. Wenn ich sage: »Jetzt werde ich mir eine Königin anschaffen mit ganz furchtbaren Augen, die wird alles aus dem Feld schlagen«, so werden Sie lachen. Es ist egal, wie ein Bauer aussieht. Es ist vielmehr so, daß die Gesamtheit der Spielregeln den logischen Ort des Bauern ergibt. Der Bauer ist eine Variable, so wie das »x« in der Logik.

Es ist klar, daß es beim Schachspiel nicht auf die tatsächlichen Bewegungen ankommt. Die Bewegungen auf dem Schachfeld sind nicht die Bewegungen der Physik. Wenn ich sage: »Das Rössel *kann* sich nur im Dreiersprung bewegen, der Läufer kann nur schräg, der Turm nur gerade ziehen«, so bedeutet das Wort »*kann*« die grammatische Möglichkeit. Was wider die Regeln ist, ist Verstoß gegen die Syntax.

Wenn man mich nun fragt: Wodurch unterscheidet sich die Syntax einer Sprache vom Schachspiel? so antworte ich: Durch ihre Anwendung und nur durch diese. Wir können die Syntax einer Sprache aufstellen, ohne zu wissen, ob sich diese Syntax je wird anwenden lassen. (Hyperkomplexe Zahlen.) Man kann nicht mehr sagen als: Die Syntax läßt sich nur auf das anwenden, worauf sie sich anwenden läßt. Wenn es Menschen auf dem Mars gäbe und sie so Krieg miteinander führten wie die Figuren auf dem Schachfeld, dann würde der Generalstab die Regeln des Schachspiels zum Prophezeien benutzen. Es wäre dann eine wissenschaftliche Frage, ob sich der König bei einer bestimmten Spielkonstellation matt setzen läßt, ob er sich in drei Zügen matt setzen läßt und so weiter.

Das Wesentliche ist: Die Syntax kann nicht durch die Sprache gerechtfertigt werden. Wenn ich *Ihr Porträt* male und einen schwarzen Schnurrbart hinmale, so kann ich auf Ihre Frage, warum ich das tue, sagen: Schauen Sie doch hin! Da sehen Sie einen schwarzen Schnurrbart.[6] Wenn Sie mich dagegen fragen, *warum* ich eine Syntax verwende, so kann ich zur Rechtfertigung auf nichts hinweisen. Die Syntax läßt sich nicht begründen. Sie ist daher willkürlich. Losgelöst von den Anwendungen, für sich allein betrachtet, ist sie Spiel, genau so wie das Schachspiel.

---

3. Siehe oben S. 49 Anm. (F. H.)
4. *Symposion* I (1927) S. 25. (F. H.)
5. Im Maitrimester 1 9 3 0, nach G. E. Moores Vorlesungsaufzeichnungen, die ich durch das freundlidie Entgegenkommen von Frau Dorothy Moore und Herrn C. Lewy einsehen durfte. »*Einwendung* zu : 'Kalkül ist ein Spiel': Ist es ein Spiel mit Tinte und Papier? Nein! Aber auch: Das Wesen des Schachspiels ist nicht Holzstücke. Das dem Schachspiel Charakteristische ist die logische Multiplizität seiner Regeln. (usw.)« (F. H.)
6. Waismann hatte tatsächlich einen dunklen Schnurrbart. (F. H.)

uma forma lógica. Não se pode estudar as propriedades de uma forma e pensar consigo mesmo: se algum dia encontrarmos uma forma assim, já estaremos preparados.

Formalismo

Algo sobre o formalismo está certo e algo está errado.

A verdade sobre o formalismo é que toda sintaxe pode ser concebida como um sistema de regras de jogo. Estive pensando sobre o que Weyl pode querer dizer quando afirma que o formalista concebe os axiomas da matemática como as regras do jogo de xadrez.[4] Gostaria de dizer: não somente os axiomas da matemática, mas toda sintaxe é arbitrária.

Em Cambridge, perguntaram-me se achava que a matemática tinha a ver com os traços de tinta no papel.[5] Ao que respondi: exatamente no mesmo sentido em que o jogo de xadrez tem a ver com as peças de madeira. O jogo de xadrez não consiste em empurrar peças de madeira sobre a madeira. Se disser: "Agora vou arranjar uma rainha com olhos muito terríveis para poder tirar tudo do campo", você vai rir. Não interessa a aparência do peão. Antes de tudo é a totalidade das regras do jogo que perfazem o lugar lógico do peão. O peão é uma variável, como o "x" na lógica.

É claro que no jogo de xadrez não são os movimentos reais que importam. Os movimentos no tabuleiro de xadrez não são movimentos da física. Quando digo: "O cavalo só *pode* pular três casas, o bispo só pode se mover na diagonal, a torre só pode se mover em linha reta", a palavra "*pode*" significa a possibilidade gramatical. O que é contra as regras é uma violação da sintaxe.

Se alguém me perguntar agora: como a sintaxe de uma linguagem difere do jogo de xadrez? então respondo: por meio de sua aplicação e somente por meio dela. Podemos estabelecer a sintaxe de uma linguagem sem saber se esta sintaxe algum dia funcionará. (Números hipercomplexos.) Não se pode dizer mais do que: a sintaxe só pode ser aplicada àquilo a que pode ser aplicada. Se houvesse pessoas em Marte e estivessem em guerra umas com as outras como as peças no tabuleiro de xadrez, o Estado-Maior usaria as regras do jogo de xadrez para profetizar. Seria então uma questão científica se o rei pode sofrer o xeque-mate em uma determinada constelação do jogo, se ele pode levar xeque-mate em três movimentos, e assim por diante.

O essencial é: a sintaxe não pode ser justificada pela linguagem. Se eu pintar o *seu retrato*, e pintar um bigode preto nele, quando você perguntar por que estou fazendo isto, posso dizer: Dê uma olhada! Lá você vê um bigode preto.[6] Por outro lado, se você me perguntar por que estou usando uma sintaxe, não posso apontar para nada que justifique isto. Não se pode dar razões para uma sintaxe. Ela é, portanto, arbitrária. Separada das aplicações, vista isoladamente, ela é um jogo, assim como o xadrez.

Portanto, há algo certo sobre o formalismo. *Frege* opôs-se acertadamente à concepção de que os números da aritmética sejam sinais.[7] O sinal "0" não tem a propriedade de adicionar o sinal

---

4. *Symposion* I (1927) S. 25. (N. E.)
5. No trimestre de maio de 1930, de acordo com as anotações das aulas de G. E. Moore, que tive permissão para inspecionar graças à gentil cooperação da Sra. Dorothy Moore e do Sr. C. Lewy. "*Objeção* a: 'O cálculo é um jogo': É um jogo com tinta e papel? Não! Mas também: a essência do jogo de xadrez não são pedaços de madeira. O que é característico do jogo de xadrez é a multiplicidade lógica de suas regras. (etc.)« (N. E.)
6. Waismann realmente tinha um bigode preto. (N. E.)
7. *Grundgesetze der Arithmetik* II, Jena, 1903, §§ 88- 137. (N. E.)

Da ist also das Richtige am Formalismus. *Frege* hat sich mit Recht gegen die Auffassung gewendet, daß die Zahlen der Arithmetik die Zeichen sind.[7] Das Zeichen »0« hat doch nicht die Eigenschaft, zu dem Zeichen »1« addiert das Zeichen »1« zu ergeben. In dieser Kritik hatte Frege recht. Nur hat er nicht das andere gesehen, was am Formalismus berechtigt ist, daß die Symbole der Mathematik nicht die Zeichen sind, aber doch keine Bedeutung haben. Für Frege stand die Alternative so: Entweder wir haben es mit den Tintenstrichen auf dem Papier zu tun, oder diese Tintenstriche sind Zeichen *von etwas*, und das, was sie vertreten, ist ihre Bedeutung. Daß diese Alternative nicht richtig ist, zeigt gerade das Schachspiel: Hier haben wir es nicht mit den Holzfiguren zu tun, und dennoch vertreten die Figuren nichts, sie haben in Freges Sinn keineBedeutung. Es gibt eben noch etwas drittes, die Zeichen können verwendet werden wie im Spiel. Wenn man hier (beim Schachspiel) von »Bedeutung« reden wollte, so wäre es am natürlichsten zu sagen: Die Bedeutung des Schachspiels ist das, was alle Schachspiele gemeinsam haben.

Wenn wir in der Geometrie eine Figur konstruieren, so haben wir es auch nicht mit den Linien am Papier zu tun. Die Bleistiftstriche sind dasselbe, was die Zeichen in der Arithmetik und was die Figuren im Schachspiel sind. Das Wesentliche sind die Regeln, die für diese Gebilde gelten - oder besser gesagt, nicht das »Wesentliche«, sondern das, was mich an ihnen interessiert.

Gleichung und Tautologie I

Ich glaube, die Mathematik wird, wenn der Grundlagenstreit beendet sein wird, das Gesicht annehmen, das sie auf der Volksschule hat, wo man mit der russischen Rechenmaschine arbeitet.[8][9] Die Art, wie man in der Volksschule Mathematik treibt, ist absolut streng und exakt. Es braucht in keiner Weise verbessert zu werden. Die Mathematik ist immer eine Maschine, ein Kalkül. Der Kalkül beschreibt nichts. Er läßt sich auf das anwenden, auf was er sich anwenden läßt. Man kann nur das zählen, was sich zählen läßt, und dafür gelten auch die Resultate des Kalküls.

Man kann leicht auf den Glauben kommen, daß der Ausdruck einer Gleichung eine Tautologie ist. Daß z.B. 28 + 16 = 44 ist, könnte man in folgender Weise ausdrücken:

$$(E28x)\ \varphi x\ .\ (E16x)\ \psi x\ .\ \mathrm{Ind.}: \supset : (E44x)\ \varphi x \lor \psi x$$

Dieser Ausdruck ist eine Tautologie. Aber um die Zahl auf der rechten Seite zu finden, die den Ausdruck zu einer Tautologie machte, muß man einen Kalkül benutzen, und dieser Kalkül ist ganz unabhängig von der Tautologie. Die Tautologie ist die Anwendung des Kalküls, nicht sein Ausdruck. Der Kalkül ist ein Abakus, ein Rechenbrett, eine Rechenmaschine; das arbeitet mit Strichen, Ziffern etc. Diesen Kalkül kann man zwar hinterher dazu verwenden, eine Tautologie zu konstruieren; aber deswegen hat der Kalkül gar nichts mit Sätzen und Tautologie zu tun.

Tatsächlich rechnet ja ein jeder Mensch auf der Schule mit Zahlen, und zwar völlig streng, ohne eine Ahnung davon zu haben, was eine Tautologie ist. Dann kann aber das Wesen des Kalküls nichts mit der Tautologie zu schaffen haben.

Es gibt hier übrigens zwei Auffassungen. Russell hatte in den *Principia Mathematica* geglaubt, daß seine logischen Sätze etwas sagen, daß sie etwas beschreiben. Bei dieser Auffassung ist es

7. *Grundgesetze der Arithmetik* II, Jena, 1903, §§ 88- 137. (F. H.)
8. Als Volksschullehrer hatte Wittgenstein selber die russische Rechenmaschine sehr geschätzt, obwohl sie von der damals einsetzenden »Schulreform« etwas scheel angesehen wurde. (F. H.)
9. Die »russische Rechenmaschine« war wohl eine Art *Ohdner-Arithmometer*, eine Art mechanischer Rechenwerk, das Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts in germanischen Ländern gut bekannt war. (A. U.)

"1" ao sinal "1". Frege estava certo nesta crítica. Só que ele não viu uma outra coisa que, no formalismo, se justifica, a saber, que mesmo que os símbolos da matemática não sejam sinais, eles não têm significado. Para Frege, a alternativa era esta: ou estamos lidando com as pinceladas de tinta no papel, ou estas pinceladas são sinais *de algo*, e o que representam é o seu significado. Que esta alternativa não seja correta, o jogo de xadrez em particular já o mostra: aqui não estamos lidando com as figuras de madeira e, ainda assim, as figuras não representam nada, não têm significado no sentido de Frege. Também há um terceiro elemento, os sinais podem ser empregados como no jogo. Se alguém quisesse falar de "significado" aqui (no jogo de xadrez), seria mais natural dizer: o significado do jogo de xadrez é o que todos os jogos de xadrez têm em comum.

Quando construímos uma figura na geometria, também não estamos lidando com as linhas no papel. As marcas de lápis são as mesmas coisas que são os sinais na aritmética e as peças no jogo de xadrez. O essencial são as regras que valem nessas estruturas - ou melhor dito, não o "essencial", mas o que nele me interessa.

Equação e Tautologia I

Acho que quando a polêmica sobre os fundamentos acabar, a matemática vai assumir a cara que tem no ensino fundamental, onde as pessoas trabalham com a máquina de calcular russa.[8][9] A maneira como se faz matemática no ensino fundamental é absolutamente estrita e precisa. Não precisa ser melhorada de modo algum. A matemática é sempre uma máquina, um cálculo. O cálculo nada descreve. Pode ser aplicado àquilo a que pode ser aplicado. Só se pode contar o que pode ser contado, e os resultados do cálculo também se aplicam a isto.

Não é difícil chegar a acreditar que a expressão de uma equação seja uma tautologia. Que, por exemplo, 28 + 16 = 44 pode ser expresso da seguinte maneira:

$$(E28x)\ \varphi x\ .\ (E16x)\ \psi x\ .\ \mathrm{Ind.}: \supset : (E44x)\ \varphi x \lor \psi x$$

Esta expressão é uma tautologia. Mas para encontrar o número à direita que torna a expressão numa tautologia, é necessário utilizar um cálculo, e este cálculo é totalmente independente da tautologia. A tautologia é a aplicação do cálculo, não a sua expressão. O cálculo é um ábaco, um tabuleiro de cálculo, uma máquina de calcular; que trabalha com traços, dígitos etc. Este cálculo pode ser aplicado posteriormente para construir uma tautologia; mas, por causa disto, o cálculo nada tem a ver com proposições e tautologia.

Na verdade, todo mundo na escola calcula com números, e o faz estritamente, sem ter ideia do que é uma tautologia. Mas então a essência do cálculo não pode ter nada a ver com tautologia.

A propósito, existem duas concepções aqui. Russell acredita, no *Principia Mathematica*, que suas proposições lógicas dizem algo, que descrevem algo. Com esta concepção é compreensível que se queira dizer que a tautologia expressa o sentido da equação 28 + 1 6 = 44. Mas, uma vez

8. Como professor de escola fundamental, o próprio Wittgenstein valorizava muito a máquina de calcular russa, embora ela fosse vista com certo desdém pela "reforma escolar" que estava começando naquela época. (N. E.)
9. A "máquina de calcular russa" era, provavelmente, uma espécie de *aritmômetro de Ohdner*, uma espécie de calculadora mecânica muito conhecida nos países germânicos por volta do fim do século XIX e começos do século XX. (N. T.)

verständlich, daß man meint, die Tautologie drücke den Sinn der Gleichung 28 + 1 6 = 44 aus. Ist man aber einmal zu der andern Auffassung übergegangen, daß die Sätze der Logik Tautologien sind und nichts sagen, so ist es ganz inkonsequent, noch an der Behauptung festzuhalten, die Tautologie drücke aus, daß 28 + 16 = 44 ist.

In gewissem Sinne gleicht die mathematische Gleichung vielmehr einem empirischen Satz als einer Tautologie. Sie gleicht nämlich dem, was die Tautologie *zeigt*.

25. September 1930[10]

⟨VERSCHIEDENES⟩

Es scheint, daß man sagen kann, daß die Gegenwart allein Realität besitzt. Hier muß man fragen: Im Gegensatz wozu? Soll es heißen, daß meine Mutter nicht existiert hat oder daß ich heute früh nicht aufgestanden bin? Das können wir nicht meinen. Soll es heißen, daß die Ereignisse, an die ich mich jetzt nicht erinnern kann, nicht existierten? Auch nicht.

Der gegenwärtige Augenblick, von dem hier die Rede ist, muß etwas bedeuten, was nicht *in* einem Raum ist, sondern was selbst ein Raum ist.

Es scheint etwas zu geben, was nicht Allgemeinheit, sondern *Symptom* für Allgemeinheit ist, so z.B., wenn ich sage: »Wenn du das Fenster erleuchtet siehst, ist es ein Zeichen, daß ich zu Hause bin.« Das erleuchtete Fenster hat nicht die Multiplizität der Allgemeinheit.

Ich glaube nicht, daß es richtig ist, zu sagen, jeder Satz müsse im wörtlichen Sinne zusammengesetzt sein.[11] Wie wäre es, wenn »ambulo« nur aus der Stammsilbe bestünde? Das Richtige daran ist: Jeder Satz ist ein Spielfall für eine allgemeine Regel zur Bildung von Zeichen.[12]

Ich kann wohl fragen: War das ein Donner oder ein Schuß? Aber nicht: War das ein Lärm? Ich kann sagen: »Miß nach, ob das ein Kreis oder eine Ellipse ist!« Hier könnte man den Einwand erheben, daß das Wort »das« etwas anderes bedeutet, je nachdem der Satz wahr oder falsch ist.

Es ist klar, daß das Wort »das« eine feste Bedeutung haben muß, ob es sich nun herausstellt, daß der Satz wahr oder falsch ist. Wenn ich sagen kann: »Das ist ein Kreis«, so muß es auch einen Sinn geben zu sagen: »Das ist eine Ellipse«.

Ich kann wohl sagen: » Wisch den Tisch ab!« Aber nicht: »Wisch alle Punkte ab!«

Wenn ich sage: »Der Tisch ist braun«, so hat es einen Sinn, die Eigenschaft »braun« auf einen Träger, den Tisch, zu beziehen. Wenn ich mir den Tisch braun denken kann, so kann ich ihn mir

10. Ohne Platzangabe. Die Eintragungen bis zur nächsten Überschrift sind auf Vorder- und Rückseite geschrieben; am Ende gibt es eine halbseitige Lücke. (F. H.)

11. TLP 4,032 : »Auch der Satz ‘ambulo’ ist zusammengesetzt usw.« (F. H.)

12. Dies ist ein Wendepunkt in Bezug auf TLP. Dort bildet den zusammengesetzten Satz in seinen Zeichen so viele Gegenstände ab, wie die Komposition die Wirklichkeit widerspiegelt: Die Multiplizität zwischen Satz und Tatsachen muss dieselbe sein. Nun abbilden die Zeichen je nach Fall. Man beachte insbesondere, dass Wittgenstein zwar Syntax bereits als Spielregeln betrachtet, aber noch nicht bei der Konzeption von *Sprachspielen* angekommen ist, bei denen die Praxis, ihre Interessen und ihre Zwecke im Lebenskontext, und nicht die Anwendung auf die Realität, die Normativität von Regeln kennzeichnet. (A. U.)

que se tenha passado para uma outra concepção, a de que as proposições da lógica são tautologias e nada dizem, é totalmente inconsequente sustentar a afirmação de que a tautologia expressa que 28 + 16 = 44.

Em certo sentido, a equação matemática é mais como uma proposição empírica do que como uma tautologia. Pois ela se assemelha ao que *mostra* a tautologia.

25 de Setembro de 1930[10]

⟨VÁRIOS ASSUNTOS⟩

Aparentemente pode-se dizer que só o presente tem realidade. Aqui tem-se que perguntar: à diferença do quê? O que se está dizendo é que minha mãe existe ou que eu não acordei hoje de manhã? Não podemos querer dizer isto. O que se está dizendo é que os eventos que não consigo lembrar agora não existem? Também não.

O momento presente, de que aqui falamos, tem que significar alguma coisa que não está *em* um espaço, mas que em si é um espaço.

Aparentemente há alguma coisa que não é uma generalidade, mas é um *sintoma* da generalidade, por exemplo quando digo: “Quando você vê a janela iluminada, é um sinal de que estou em casa.” A janela iluminada não tem a multiplicidade da generalidade.

Não acho que seja correto dizer que toda proposição tem que ser um compósito em sentido literal.[11] Como seria se “ambulo” consistisse apenas na sílaba raiz? O correto é: toda proposição é uma instância de jogo de uma regra geral para a formação de sinais.[12]

Posso até perguntar: foi um trovão ou um tiro? Mas não: isto foi um barulho? Posso dizer: “Veja se isto é um círculo ou uma elipse!” Aqui pode-se levantar a objeção de que a palavra “isto” significa algo diferente, dependendo se a proposição é verdadeira ou falsa.

É claro que a palavra “isto” tem que ter um significado fixo, quer a frase seja verdadeira ou falsa. Se posso dizer: “Isto é um círculo”, então também tem que haver sentido em dizer: “Isto é uma elipse”.

Posso até dizer: “Limpe a mesa!” Mas não: “Limpe todos os pontos!”

Quando digo: “A mesa é marrom”, faz sentido relacionar a propriedade “marrom” a um suporte, a mesa. Se consigo pensar na mesa como marrom, posso pensar em qualquer outra cor. O que significa: posso imaginar *o mesmo* círculo como vermelho ou verde? O que permaneceu o

10. Sem indicação de local. As entradas até o próximo título são escritas na frente e no verso; no final, há uma lacuna de meio página. (N. E.)

11. TLP 4,032: “Mesmo a proposição ‘Ambulo’ é composta etc.” (N. E.)

12. Este é um ponto de inflexão com relação ao TLP. Ali a proposição afigura em seus sinais tantos objetos quantos a composição reflete da realidade: a multiplicidade entre a proposição e os fatos tem que ser a mesma. Agora, os sinais afiguram de acordo com o caso em pauta. Note-se, em particular, que ainda que Wittgenstein já pense na sintaxe como regras de um jogo, não chegou ainda na concepção de *jogos de linguagem*, em que a prática, seus interesses e seus propósitos dentro de um contexto de vida, e não a aplicação à realidade, é o que caracteriza a normatividade das regras. (N. T.)

in jeder andern Farbe denken. Was heißt es: Ich kann mir *denselben* Kreis rot oder grün vorstellen? Was ist dasselbe geblieben? Die Kreisform. Aber die kann ich mir allein nicht vorstellen.

»Dieser Satz hat einen Sinn« ist eine unglückliche Redewendung. »Dieser Satz hat einen Sinn«, das klingt so wie: »Dieser Mensch hat einen Hut.«

»Diese Zeichen bedeuten einen Satz«, heißt: Wir ziehen die Form des Satzes in den Zeichen nach.

Wir ziehen im Satz gleichsam die Form der Wirklichkeit nach. [F. W.]

Wenn ich weiß, daß diese Zeichen einen Satz bedeuten, so kann ich nicht fragen: welchen Satz?

VARIABLE[13]

Im Eulerschen[14] Beweis ist schon das falsch, daß man die Primzahlen in der Form $p_1, p_2, \ldots p_n$ anschreibt. Denn wenn der Index n *irgend* eine Zahl bedeuten soll, so setzt das schon ein Gesetz des Weiterschreitens voraus, und dieses Gesetz kann nur in einer Induktion gegeben sein. Der Beweis setzt also schon das voraus, was er beweisen soll.

Was bedeutet eine Variable? Wodurch kann ich das Zeichen einer Variablen unterscheiden von dem Zeichen einer Unbekannten?

Das Zeichen einer Variablen vermag nur dadurch eine Variable zu bedeuten, daß es Regeln für die Substitution des Zeichens durch Zahlen gibt. Daß eine Variable alle natürlichen Zahlen durchlaufen kann, wird dadurch ausgedrückt, daß die Regeln für die Einsetzung die Form der Induktion haben.

BEWEIS

Der Beweis ist nicht das Vehikel, um irgendwohin zu kommen, sondern die Sache selbst. Ich kann sagen: »Ich fahre bis zu dem und dem Ort mit der Eisenbahn; dann gehe ich zu Fuß bis X.« Dann haben wir zwei Vehikel für dasselbe, nämlich für die Raumstrecke.

Dagegen können nicht zwei verschiedene Beweise zum Gleichen führen. Zwei Beweise können sich entweder begegnen, wie zwei Wege, die zum selben Ziel führen, oder sie beweisen Verschiedenes: Einer Verschiedenheit der Beweise entspricht eine Verschiedenheit des Bewiesenen.[15]

REELLE ZAHLEN II

Von einer reellen Zahl kann man erst reden, wenn man sie hat.

Wenn man meint, daß im Fall der Beschränkung auf gesetzmäßig gebildete Dezimalbrüche eine Menge von Dezimalbrüchen unter den Tisch fällt, so ist dazu zu sagen: Welche denn? Gib

13. Waismann nimmt hier seine Gewohnheit, den Haupteintrag auf der Vorderseite zu schreiben, wieder auf. (F. H.)
14. Vgl. L. Euler, *Variae Observationes circa series infinitas*, 1744, Theorema VII u. H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*², Berlin, 1964, S. 192-3. (F. H.)
15. Der Beweis, daß zwei Beweise dasselbe beweisen, ist ihre Transformation ineinander. (A. W.)

mesmo? A forma circular. Mas não posso imaginá-la somente em si.

“Esta proposição tem um sentido” é uma formulação infeliz. “Esta proposição tem um sentido”, soa como: “Esta pessoa tem um chapéu.”

“Estes sinais significam uma proposição” significa: nós traçamos a forma da proposição nos sinais.

Nós traçamos na proposição, por assim dizer, a forma da realidade. [F. W.]

Se sei que estes sinais significam uma proposição, não posso perguntar: qual proposição?

VARIÁVEL[13]

A prova de Euler[14] já está errada ao escrever os números primos na forma $p_1, p_2, \ldots p_n$. Pois, se o índice n deve significar *qualquer* número, então já pressupõe uma lei de progressão que só pode ser dada em uma indução. Portanto, a prova já pressupõe o que é suposto demonstrar.

O que significa uma variável? Como posso distinguir o sinal de uma variável do sinal de uma incógnita?

O sinal de uma variável só pode significar uma variável se houver regras para a substituição do sinal por números. Que uma variável possa atravessar todos os números naturais é expresso pelo fato de que as regras para substituí-la tomam a forma da indução.

PROVA

A demonstração não é um veículo para chegar a algum lugar, mas a coisa em si mesma. Posso dizer: “Vou de trem para este e aquele lugar; depois vou caminhar até X.” Então temos dois veículos para a mesma coisa, a saber, para o segmento de espaço.

Por outro lado, duas demonstrações diferentes não podem levar à mesma coisa. Duas demonstrações podem se encontrar, como dois caminhos que levam ao mesmo destino, ou demonstrar coisas diferentes: uma diferença nas demonstrações corresponde a uma diferença no que foi demonstrado.[15]

NÚMEROS REAIS II

Só se pode falar sobre um número real quando se o tem.

Se se quer dizer que, no caso de restrição a frações decimais formadas de acordo com as regras, perde-se um conjunto de frações decimais, então devemos dizer: quais? Dê-me uma delas!

13. Waismann retoma o hábito de escrever a nota principal na parte anterior da página. (N. E.)
14. Cf. L. Euler, *Variae Observationes circa series infinitas*, 1744, Theorema VII, e H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*², Berlin, 1964, pp. 192-193. (N. E.)
15. A demonstração de que duas demonstrações demonstram a mesma coisa é sua transformação uma na outra. (N.W.)

mir einen davon an! Ein Beweis für »alle reellen Zahlen« bedeutet etwas ganz anderes als ein Beweis für alle natürlichen Zahlen.

Zunächst: Man kann nicht zuerst einen Satz für die natürlichen Zahlen beweisen und dann nachträglich entdecken, daß er auch noch für einen weiteren Bereich gilt, sondern man hat dann eben einen gänzlich neuen Satz vor sich.

Wenn wir einen Satz für alle reellen Zahlen beweisen, so bedeutet das: Wir beweisen den Satz durch Induktion für alle rationalen Zahlen, und dann kommt noch etwas: Wir interpretieren, wenn die Variable z. B. $\sqrt{2}$ bedeutet, den Satz so, daß er bedeutet: Für den Limes gilt das und das.

Der Beweis für alle reellen Zahlen steht nicht in Analogie zu dem Beweis für alle rationalen Zahlen, so daß man sagen könnte: Was man für alle rationalen Zahlen bewiesen hat - nämlich durch eine Induktion - das kann man in *derselben Weise* durch eine Ausdehnung des Beweisverfahrens für alle reellen Zahlen beweisen.[16]

---

16. Es ist also nicht so, daß ich den Satz erst für rationale Zahlen beweise und ihn dann in *analoger Weise* auf reelle Zahlen ausdehne. Der Beweis für reelle Zahlen steht nicht in Analogie mit dem Beweis Hir rationale Zahlen, sondern er bedeutet etwas ganz anderes.
Der Beweis für die reellen Zahlen ist nicht die Fortsetzung des Beweises für rationale Zahlen, sondern etwas ganz anderes.
Wenn irgendeine reelle Zahl vorgelegt ist, so gilt das auch von dieser, und zwar nicht au(Grund einer Induktion, sondern auf Grund der Rechenregeln, die ich schon beim Rechnen mit reellen Zahlen festgesetzt habe.
Eine solche Formel bedeutet also nicht: Für alle reellen Zahlen gilt das und das sondern: Wenn eine reelle Zahl vorliegt, dann interpretiere ich die Formel so, daß sie bedeutet: Für den Limes gilt das und das, und beweise dies auf Grund der Rechenregeln, die für die reellen Zahlen festgesetzt sind.
Die Sache liegt also so: Ich denke mir eine *bestimmte* reelle Zahl gegeben und halte diese während des Beweises fest. Das ist etwas ganz anderes als bei den rationalen Zahlen; denn dort kam es ja gerade darauf an, ob die Formel auch richtig bleibt, wenn die rationalen Zahlen variieren, und *deshalb* hatte der Beweis die Form der Induktion. Hier aber entsteht gar nicht die Frage, ob die Formel für »alle reellen« Zahlen gilt, und zwar darum nicht, weil wir die reelle Zahl ja gar nicht variieren lassen.
Wir beweisen ja nicht: *Wie immer* die Folge $r_1, r_2, \ldots r_n \ldots$ gewählt wird, immer gilt das und das.
Wir lassen die variable reelle Zahl nicht alle Werte - d. h. alle Gesetze - durchlaufen.
Wir stützen uns einfach auf die Rechenregeln und sonst auf nichts.
Wenn eine Formel für eine natürliche Zahl gilt, so weiß ich deswegen noch nicht, ob sie für eine andere gilt, und ich muß sie deshalb beweisen.

Natürliche Zahlenvariable: n

F(n) $\xrightarrow{\text{Beweis}}$ Grundformel $\longrightarrow$ Induktion

Reelle Zahlen variable: ρ

F(ρ) $\xrightarrow{\text{Beweis}}$ Grundformel $\longrightarrow$ Rechenregeln für reelle Zahlen

Wenn ich beweise, daß die Formel für die reellen Zahlen gilt, so leite ich alles aus den Rechenregeln her, die für die reellen Zahlen festgesetzt sind. *Ich beweise durch Induktion die Formel für rationale Zahlen, und ich zeige dann, daß sie sich auf die reellen Zahlen überträgt, und zwar einfach auf Grund der Rechenregeln, die ich für die reellen Zahlen festgesetzt habe.* Aber ich beweise nicht, daß die Formel für »alle reellen« Zahlen gilt, und zwar darum nicht, weil die Rechenregeln für die reellen Zahlen nicht die Form der Induktion haben.
»Also gilt der Satz für alle Zahlen.« Wieder muß man sagen: Es gibt kein »also«. Der Beweis ist schon alles, nicht erst ein Vehikel. Der Beweis beweist nur, was er beweist, und alles übrige ist Zutat.
Man könnte nun meinen: Eigentlich müßte der Satz für alle reellen Zahlen bewiesen werden, und was wir geben, ist nur eine Andeutung. Das ist falsch. Unser Beweis für die reellen Zahlen ist schon alles, worauf es ankommt. Der Beweis

Uma demonstração para “todos os números reais” significa algo completamente diferente de uma demonstração para todos os números naturais.

Em primeiro lugar: não se pode demonstrar primeiro uma proposição para os números naturais e então descobrir mais tarde que ela também se aplica a uma outra área mais ampla, senão que se tem uma proposição completamente nova diante da outra.

Se demonstrarmos uma proposição para todos os números reais, isto significa: demonstramos a proposição por indução para todos os números racionais, e então surge outra coisa: se, por exemplo, a variável significa $\sqrt{2}$, interpretamos a proposição de tal forma que signifique: para o caso limite aplica-se isto e aquilo.

A prova para todos os números reais não é análoga à prova para todos os números racionais, de modo que se poderia dizer: o que foi demonstrado para todos os números racionais - a saber, por indução - pode ser feito da *mesma maneira*, estendendo o procedimento da prova para demonstrar todos os números reais.[16]

---

16. Portanto, não é o caso de que primeiro demonstre a proposição para números racionais e depois a estendo de maneira análoga aos números reais. A demonstração para números reais não é análoga à demonstração para números racionais, mas significa algo completamente diferente.
A demonstração para os números reais não é a continuação da demonstração para os números racionais, mas algo totalmente diferente.
Se algum número real for apresentado, isso também se aplica a este, e não com base em uma indução, mas com base nas regras de cálculo que já estabeleci ao calcular com números reais.
Esta fórmula não significa: Isto e aquilo se aplica a todos os números reais, mas sim: se um número real está presente, então interpreto a fórmula de uma maneira que signifique: isto e aquilo se aplica ao caso limite, e o demonstro com base nas regras de cálculo que estão fixadas para os números reais.
Então a coisa é assim: imagino que um *determinado* número real seja dado e o deixo reservado durante a demonstração. Isto é totalmente diferente dos números racionais; pois ali era precisamente uma questão de saber se a fórmula permanece correta quando os números racionais variam, e é *por isto* que a demonstração vem na forma de indução. Aqui, entretanto, não surge a questão de se a fórmula se aplica a “todos os números reais” e, particularmente, não porque não permitimos que o número real varie de forma alguma.
Não demonstramos: como isto e aquilo sempre se aplica, *sempre* que escolhemos a sequência $r_1, r_2, \ldots r_n$.
Não permitimos que decorra que o número real da variável assuma todos os valores - isto é, todas as leis.
Nos apoiamos simplesmente nas regras do cálculo e nada mais.
Se uma fórmula é válida para um número natural, então ainda não sei se ela é válida para outro tipo de número e, portanto, tenho que demonstrá-lo.

Variável de número natural: n

F(n) $\xrightarrow{\text{Demonstração}}$ Fórmula básica $\longrightarrow$ Indução

Variável de números reais: ρ

F(ρ) $\xrightarrow{\text{Demonstração}}$ Fórmula básica $\longrightarrow$ Regras de cálculo para números reais

Se demonstrar que a fórmula é válida para os números reais, então deduzo tudo das regras de cálculo que são estabelecidas para os números reais. *Demonstro a fórmula para números racionais por indução, e então mostro que ela se transfere para os números reais, simplesmente com base nas regras de cálculo que estabeleci para os números reais.* Mas não estou demonstrando que a fórmula seja válida para “todos os números reais”, e isto porque as regras de cálculo para números reais não têm a forma de indução.
“Portanto, a proposição se aplica para todos os números.” Mais uma vez, tem-se que dizer: não existe “portanto”. A demonstração já é tudo, e não um mero veículo. A demonstração só demonstra o que demonstra, e tudo o mais é incidental.
Poder-se-ia agora pensar: na verdade,a proposição teria que ser demonstrada para todos os números reais, e o que

Ein Beweis für reelle Zahlen muß in ganz anderer Weise aufgefaßt werden als ein Beweis für rationale Zahlen. Nur in diesem letzten Fall ist es möglich, den Beweis durch Induktion zu führen, und das erweckt nun den Anschein, als ob der Beweis auf etwas außerhalb seiner hindeute.

Das ist natürlich verkehrt. Der Beweis muß alles enthalten, was er bedeutet.

Der Beweis für alle reellen Zahlen ist nicht eine Abkürzung für etwas, das auch ausführlich bewiesen werden könnte. Das Plus, das zu dem Beweis für die rationalen Zahlen noch hinzukommt, ist kein Analogon der Induktion. Der Beweis für die reellen Zahlen bleibt nichts schuldig.

Nehmen wir z. B. an, ich habe die Formel $a^m . a^n = a^{m+n}$ für rationale Werte von m, n bewiesen, und zwar durch Induktion, und ich möchte sie jetzt für reelle Zahlenwerte beweisen. Wie tue ich das? Es ist offenbar nicht mehr möglich, den Beweis durch Induktion zu führen.

Die Auffassung, daß der Satz von »allen reellen Zahlen« gilt, ob ich sie nun kenne oder nicht, ist ganz leer. Tatsächlich kann ich ja von einer reellen Zahl erst reden, wenn ich sie habe. Tatsächlich kann ich dem Satz erst eine Bedeutung geben, *wenn* ich schon die reelle Zahl kenne.

Man darf nicht denken: Der Satz gilt für alle rationalen Zahlen, und nun zeigen wir, daß er auch noch für alle reellen Zahlen gilt. Was hinzukommt, ist nicht ein Nebenbeweis.

Was im Beweis hinzukommt, ist nicht etwa ein zweiter Teil, vergleichbar der Induktion, sondern dieser zweite Teil hat einen ganz andern Charakter: Er ist eine Interpretation.

Wenn also eine Formel für reelle Zahlen aufgestellt wird, so liegt darin ein Beweis und eine Interpretation.

Die Formel ist so zu verstehen: Wenn mir eine reelle Zahl gegeben ist, dann gilt das und das.

Eine Formel, die für reelle Zahlen bewiesen ist, sagt nicht: Für alle reellen Zahlen gilt ... , sondern sie sagt: Wenn eine reelle Zahl vorgelegt ist, dann gilt ...

Und zwar nicht auf Grund eines Beweises, sondern auf Grund einer Interpretation.

Kann man das nicht auch von den Formeln für natürliche Zahlen behaupten? Nein. Der Unterschied ist der: Der Beweis besteht in einer Induktion.

IDEALISIERUNG

Was bedeutet das Idealisieren? Wird denn dadurch etwas anders, daß ich idealisiere? Andere ich denn dadurch etwas, daß ich idealisiere?

In der Logik gibt es nicht den Gegenstand und die Beschreibung des Gegenstandes. Wenn ich von 999 Dingen spreche, so habe ich die Zahl schon dargestellt, und zwar durch die Struktur der Operationen.

Ich brauche mich nicht darum zu kümmern, ob es auch tatsächlich eine Menge gibt, die 999 Individuen enthält. Ja, das Aufwerfen einer solchen Frage setzt bereits das vorhergehende Sein der Zahlvoraus.

Wenn man sagen wollte: Die Mathematik beruhe darauf, daßwir die Wirklichkeit, ihre Eigenschaften, Beziehungen, und dergleichen idealisieren - so wäre die erste Frage die: Und was wird denn dadurch anders, daß ich idealisiere?

---

ist nicht etwa eine Abkürzung für etwas, das ausführlicher bewiesen werden könnte. Der Beweis folgt einfach aus den Rechenregeln, die wir für die reellen Zahlen festgesetzt haben. (A. W.)

Uma demonstração para números reais deve ser entendida de uma maneira completamente diferente do que uma demonstração para números racionais. Somente neste último caso é possível demonstrar por indução, e isto faz com que pareça que a demonstração está apontando para algo fora dela.

Claro que isso está errado. A demonstração tem que conter tudo o que ela significa.

A demonstração de todos os números reais não é uma abreviatura de algo que também poderia ser demonstrado em detalhes. O excedente que é adicionado à demonstração para os números racionais não é um análogo da indução. A demonstração dos números reais nada fica devendo.

Suponha, por exemplo, que eu tenha demonstrado a fórmula $a^m . a^n = a^{m+n}$ para os valores racionais de *m* e *n* por indução, e agora quero demonstrá-la para valores numéricos reais. Como faço isto? Obviamente não é mais possível demonstrá-la por indução.

A concepção de que a proposição vale para “todos os números reais”, quer eu saiba disto ou não, é completamente vazia. De fato, só posso falar sobre o número real que possuo. De fato, só posso dar um significado à proposição *se* já conhecer o número real.

Não se deve pensar: a proposição vale para todos os números racionais e agora mostramos que também é válida para todos os números reais. O que é adicionado não é uma evidência colateral.

O que se acrescenta na demonstração não é uma segunda parte, comparável à indução, mas esta segunda parte tem um caráter completamente diferente: é uma interpretação.

Portanto, quando uma fórmula para números reais é estabelecida, ali se acha uma demonstração e uma interpretação.

A fórmula deve ser compreendida da seguinte forma: se um número real é dado, vale isto e aquilo.

Uma fórmula que foi demonstrada para números reais não diz: para todos os números reais vale ..., mas diz: se um número real for apresentado, então vale ...

Particularmente não com base numa demonstração, mas com base numa interpretação.

Não se pode afirmar também o mesmo sobre as fórmulas para números naturais? Não. A diferença é esta: a demonstração consiste numa indução.

IDEALIZAÇÃO

O que significa idealizar? Algo fica diferente pela minha idealização? Mudo alguma coisa por idealizar?

Na lógica não existe o objeto e a descrição do objeto. Quando falo de 999 coisas, já representei o número, em particular mediante a estrutura das operações.

Não preciso me preocupar se há de fato um conjunto que contém 999 indivíduos. A própria formulação de tal questão já pressupõe a existência prévia do número.

Se alguém quisesse dizer: a matemática se baseia no fato de que idealizamos a realidade, suas propriedades, relações e assim por diante - a primeira pergunta seria: E o que fica diferente por causa da minha idealização?

---

estamos fornecendo é apenas uma indicação. Isto é falso. Nossa demonstração dos números reais já tem tudo o que importa. A demonstração não é uma abreviatura de algo que poderia ser comprovado com mais detalhes. A demonstração simplesmente segue das regras de cálculo que estabelecemos para os números reais. (N. W.)

INTERPRETATION

Was heißt Interpretation? Entweder ist die Interpretation etwas Unwesentliches, etwas, das z. B. von meiner Stimmung abhängt: Dann kann man sagen, jede Interpretation ist überflüssig. Eine Interpretation kann weder wahr noch falsch sein. Oder die Interpretation hängt wesentlich mit der Mathematik zusammen. Worin besteht sie dann? Die Interpretation kann nicht in Sätzen bestehen, sondern wieder nur in Regeln: Die Regeln des Kalküls werden gleichsam in eine Umgebung, in einen weiteren syntaktischen Zusammenhang eingefügt.[17]

Wenn wir z.B. den Russellschen Kalkül interpretieren wollten, so würde es sich zeigen, daß das Zeichen »unendlich« oder »$\aleph_0$« nicht in den Zusammenhang hinein paßt, für den es eigentlich bestimmt war, weil sonst Unsinn entsteht.[18] D. h., die Syntax des Wortes »unendlich« ist eine ganz andere als die Syntax der Russellschen Zeichen für das Unendliche.

Als Kalkül ist also dieser Kalkül in Ordnung. Nur leistet er nicht das, was Russell bei seiner Aufstellung geglaubt hat. Russell hat natürlich, als er den Kalkül gemacht hat, nicht die Absicht gehabt, bloß ein Schachspiel zu entwickeln, sondern er meinte, mit seinem Kalkül das wiederzugeben, was das Wort »unendlich« in der Anwendung wirklich bedeutet. Aber darin hat er sich geirrt.

Der Kalkül ist auf alles anwendbar, auf das er anwendbar ist. (Und mehr kann man nicht sagen.)

Die Interpretation aber schiebt den Kalkül in einen ganz andern, nämlich in einen ganz falschen Zusammenhang von syntaktischen Regeln hinein.

Die Aussage: »Wenn du nur lange genug suchst, findest du bestimmt eine Zahl« ist ganz bedeutungslos. Ins Unendliche hinein kann man nicht suchen.

Es gibt in der Logik nicht etwas Allgemeines und etwas Spezielles.[19]

17. Später, in der PU, wird dieser Gedanke umgewandelt in: "Darum besteht eine Neigung, zu sagen: jedes Handeln nach der Regel sei ein Deuten. »Deuten« aber sollte man nur nennen: einen Ausdruck der Regel durch einen anderen ersetzen. " (§ 201). (A. U.)
18. Diese Zahl wurde von Whitehead u. Russell in *Principia Mathematica* II, Cambridge, 1912, S. 268 ff. eingeführt. (F. H.)
19. Vgl. TLP 5.454. (F. H.)

INTERPRETAÇÃO

O que significa interpretação? Ou a interpretação é algo irrelevante, algo que, por exemplo, depende do meu humor: então pode-se dizer que qualquer interpretação é supérflua. Uma interpretação não pode ser verdadeira nem falsa. Ou a interpretação está essencialmente relacionada à matemática. Então, no que ela consiste? A interpretação não pode consistir em proposições, mas novamente só em regras: as regras do cálculo são, por assim dizer, inseridas em um ambiente, em um contexto sintático mais amplo.[17]

Se quiséssemos interpretar o cálculo de Russell, por exemplo, isto mostraria que o sinal de "infinito" ou "$\aleph_0$" não se encaixa no contexto para o qual foi realmente planejado, porque, de outro modo, produziria um contrassenso.[18] Ou seja, a sintaxe da palavra "infinito" é totalmente diferente da sintaxe dos sinais de Russell para o infinito.

Como cálculo, este cálculo está em ordem. Só que ele não faz o que Russell acreditava quando foi elaborado. É claro que, quando Russell fez o cálculo, ele não pretendia apenas desenvolver um jogo de xadrez, mas pretendia usar seu cálculo para reproduzir o que a palavra "infinito" realmente significa na sua aplicação. Mas ele estava errado sobre isto.

O cálculo é aplicável a qualquer coisa a que seja aplicável. (E isto é tudo que se pode dizer.)

A interpretação, no entanto, empurra o cálculo para um contexto completamente diferente, ou seja, para um contexto completamente equivocado de regras sintáticas.

O enunciado: "Se você procurar por tempo suficiente, com certeza encontrará um número" não tem nenhum sentido. Não se pode procurar no infinito.

Não há nada geral nem nada específico na lógica.[19]

17. Posteriormente, nas IF este pensamento se transforma em: "Por isto existe uma inclinação a dizer: toda ação segundo a regra é uma interpretação. Mas 'interpretação' deveria somente denominar: substituir uma expressão da regra por outra." (§ 201) (N. T.)
18. Este número foi introduzido por Whitehead & Russell no *Principia Mathematica* II, Cambridge, 1912, pp. 268ss. (N. E.)
19. Cf. TLP 5,454 (N. E.)

TEIL IV

Mittwoch, 17. Dezember 1930 (Neuwaldegg)[1]

ÜBER SCHLICKS ETHIK

Schlick sagt, es gab in der theologischen Ethik zwei Auffassungen vom Wesen des Guten: nach der flacheren Deutung ist das Gute deshalb gut, weil Gott es will; nach der tieferen Deutung will Gott das Gute deshalb, weil es gut ist.[2] Ich meine, daß die erste Auffassung die tiefere ist: gut ist, was Gott befiehlt. Denn sie schneidet den Weg einer jeden Erklärung, »warum« es gut ist, ab, während gerade die zweite Auffassung die flache, die rationalistische ist, die so tut, »als ob« das, was gut ist, noch begründet werden könnte.

Die erste Auffassung sagt klar, daß das Wesen des Guten nichts mit den Tatsachen zu tun hat und daher durch keinen Satz erklärt werden kann. Wenn es einen Satz gibt, der gerade das ausdrückt, was ich meine, so ist es der Satz: Gut ist, was Gott befiehlt.

WERT[3]

Wenn ich die Wirklichkeit beschreibe, so beschreibe ich, was ich bei den Menschen vorfinde. Die Soziologie muß ebenso unsere Handlung und unsere Wertungen beschreiben wie die der Neger. Sie kann nur berichten, was geschieht. Aber nie darf in der Beschreibung des Soziologen der Satz vorkommen: »Das und das bedeutet einen fortschritt.«

Was ich beschreiben kann, ist, daß vorgezogen wird: Nehmen Sie an, ich hätte durch Erfahrung gefunden, daß Sie immer von zwei Bildern dasjenige vorziehen, das mehr grün enthält, das eine grünliche Tönung enthält, etc. Dann habe ich nur *das* beschrieben, aber nicht, daß dieses Bild wertvoller ist.

Was ist das Wertvolle an einer Beethovensonate? Die Folge der Töne? Nein, sie ist ja nur eine Folge unter vielen. Ja, ich behaupte sogar: Auch die Gefühle Beethovens, die er beim Komponieren der Sonate hatte, waren nicht wertvoller als irgendwelche andere Gefühle. Ebensowenig ist die Tatsache des Vorgezogenwerdens an sich etwas Wertvolles.

1. In der Vorstadt von Wien. Gelegentlich wohnte die Familie Wittgenstein dort. (F. H.)
2. *Fragen der Ethik*, Wien, 1930, S. 9. »Das ist die tiefe Deutung« schrieb Wittgenstein am zugehörigen Platz, am Rand seines Exemplars des Buches. In der englischen, zum Teil von Schlick revidierten Übersetzung wird »die flachere Deutung ... die tiefere Deutung« zu: »one interpretation ... another, perhaps profounder, interpretation« (*Problems of Ethics*, New York, 1939, S. 11). (F. H.)
3. Wahrscheinlich entstand auch diese Sektion aus einer Diskussion über Schlicks Buch; vgl. § 9 »Die Ethik als Tatsachenwissenschaft« (a. a. o. S. 14 ff.; in der Übersetzung S. 20 ff.): » Was als die letzten Normen oder die höchsten Werte gilt muß der menschlichen Natur und dem Leben als Tatsache entnommen werden. Daher kann ein Resultat der Ethik nie mit dem Leben in Widerspruch stehen ... Wo dergleichen vorkommt ist es ein sicheres Zeichen, daß der Ethiker seine Aufgahe mißverstanden und daher nicht gelöst hat, (Wittgenstein kommentiert am Rande: »Wie seltsam aber, daß dieses Mißverständnis vorkommt!«], daß er unversehens zum Moralisten wurde, daß er sich in der Rolle des erkennenden nicht wohl fühlt und lieber Schöpfer moralischer Werte sein möchte.« [Wittgenstein: »Aber, wie kann man denn so ein Schöpfer sein? Und wurde nicht gesagt, daß ein Schöpfer in diesem Sinne nur etwas behauptete?«]. (F. H.)

PARTE IV

Quarta-Feira, 17 de Dezembro de 1930 (Neuwaldegg)[1]

SOBRE A ÉTICA DE SCHLICK

Schlick diz que na ética teológica havia duas concepções da essência do bem: de acordo com a interpretação mais rasa, o bem é bom porque Deus o quer; segundo a interpretação mais profunda, Deus quer o bem porque é bom.[2] Eu penso que a primeira concepção é a mais profunda: o que Deus ordena é que é bom. Porque ela corta o caminho de toda explicação de "por que" ele é bom, enquanto a segunda concepção é rasa e racionalista, que age "como se" o que é bom ainda pudesse ser fundamentado.

A primeira concepção diz claramente que a essência do bem não tem nada a ver com fatos e, portanto, não pode ser explicada por qualquer proposição. Se há uma proposição que expressa precisamente o que quero dizer, é a proposição: o que Deus ordena é que é bom.

VALOR[3]

Quando descrevo a realidade, estou descrevendo o que encontro nas pessoas. A sociologia tem que descrever nossas ações e nossos valores tanto quanto os dos negros. Ela só pode informar o que está acontecendo. Mas na descrição do sociólogo nunca pode ocorrer a proposição: "Isto e aquilo significam um progresso."

O que posso descrever é o que se prefere: suponha que descobri pela experiência que você sempre prefere, de duas imagens, a que contém mais verde, a que contém um tom esverdeado etc. Então eu só descrevi *isto*, mas não que esta imagem é a que tem mais valor.

O que há de tão valioso em uma sonata de Beethoven? A sequência de tons? Não, esta é apenas uma sequência entre muitas. Sim, eu até afirmo que os sentimentos de Beethoven, que ele teve ao compor a sonata, não eram mais valiosos do que quaisquer outros sentimentos. Nem o fato de ser preferido é algo que tem valor em si mesmo.

O valor é um determinado estado mental? Ou uma forma que se prende a alguns dados da

1. No subúrbio de Viena. A família de Wittgenstein se transferia para lá no outono. (N. E.)
2. *Fragen der Ethik*, Wien, 1930, p. 9. "Esta é a interpretação profunda", escreveu Wittgenstein no local apropriado à margem do seu exemplar do livro. Na tradução inglesa, parcialmente revisada por Schlick "a interpretação mais rasa ... a interpretação mais profunda" se tornou: »one interpretation ... another, perhaps profounder, interpretation« (*Problems of Ethics*, New York, 1939, p. 11). (N. E.)
3. Esta seção provavelmente também surgiu de uma discussão sobre o livro de Schlick; Ver § 9 "Ética como ciência factual" (op. cit., pp. 14ss; na tradução, p. 20ss.): "O que conta como as normas últimas ou os valores mais elevados devem ser tomados da natureza humana e da vida como fatos. Portanto, um resultado da ética nunca pode estar em contradição com a vida ... Onde tal coisa ocorre é um sinal certo de que o eticista entendeu mal sua tarefa e, portanto, não a resolveu, (Wittgenstein comenta na margem: "Que estranho, porém , que há um mal-entendido! "] que de repente ele se tornou um moralista, que não se sente confortável no papel de conhecedor e prefere ser o criador de valores morais." [Wittgenstein: "Mas como alguém pode ser tal um criador? Ele não foi dito antes que um Criador neste sentido estava apenas afirmando algo "]. (N. E.)

Ist der Wert ein bestimmter Geisteszustand? Oder eine Form, die an irgendwelchen Bewußtseinsdaten haftet?[4] Ich würde antworten: Was immer man mir sagen mag, ich würde es ablehnen, und zwar nicht darum, weil die Erklärung falsch ist, sondern weil sie eine *Erklärung* ist.

Wenn man mir irgendetwas sagt, was eine *Theorie* ist, so würde ich sagen: Nein, nein! Das interessiert mich nicht. Auch wenn die Theorie wahr wäre, würde sie mich nicht interessieren - sie würde nie *das* sein, was ich suche.

Das Ethische kann man nicht lehren. Wenn ich einem anderen erst durch eine Theorie das Wesen des Ethischen erklären könnte, so hätte das Ethische gar keinen Wert.[5]

Ich habe in meinem Vortrag über Ethik zum Schluß in der ersten Person gesprochen;[6] Ich glaube, daß das etwas ganz Wesentliches ist. Hier läßt sich nichts mehr konstatieren; ich kann nur als Persönlichkeit hervortreten und in der ersten Person sprechen.

Für mich hat die Theorie keinen Wert. Eine Theorie gibt mir nichts.

RELIGION

Ist das Reden wesentlich für die Religion? Ich kann mir ganz gut eine Religion denken, in der es keine Lehrsätze gibt, in der also nicht gesprochen wird. Das Wesen der Religion kann offenbar nicht damit etwas zu tun haben, daß geredet wird, oder vielmehr: wenn geredet wird, so ist das selbst ein Bestandteil der religiösen Handlung und keine Theorie. Es kommt also auch gar nicht darauf an, ob die Worte wahr oder falsch oder unsinnig sind. Die Reden der Religion sind auch kein *Gleichnis*; denn sonst müßte man es auch in Prosa sagen können. Anrennen gegen die Grenze der Sprache? Die Sprache ist ja kein Käfig.[7]

Ich kann nur sagen: Ich mache mich über diese Tendenz im Menschen nicht lustig; ich ziehe den Hut davor. Und hier ist es wesentlich, daß das keine Beschreibung der Soziologie ist, sondern, daß ich *von mir selbst* spreche.

Die Tatsachen sind für mich unwichtig. Aber mir liegt das am Herzen, was die Menschen meinen, wenn sie sagen, daß *»die Welt da ist«*.[8]

WAISMANN FRAGT WITTGENSTEIN: Hängt das Dasein der Welt mit dem Ethischen zusammen?

WITTGENSTEIN: Daß hier ein Zusammenhang besteht, haben die Menschen gefühlt und das so ausgedrückt: Gottvater hat die Welt erschaffen, Gott-Sohn (oder das Wort, das von Gott ausgeht)ist das Ethische. Daß man sich die Gottheit gespalten und wieder als eines denkt, das

4. Schlick a. a. O.: »Die letzten Wertungen sind also in der Wirklichkeit des menschlichen Bewußtseins bestehende Tatsachen, und selbst wenn die Ethik eine Normwissenschaft wäre, hörte sie daher nicht auf, eine Wissenschaft von *Tatsachen* zu sein.« (F. H.)

5. In seinem Msßd. am 15. November 1929, schrieb Wittgenstein: »Man kann die Menschen nicht zum Guten führen; man kann sie nur irgendwohin führen. Das Gute liegt außerhalb des Tatsachenraumes.« (F. H.)

6. Vielleicht weist Wittgenstein nicht auf seinen Bericht seiner eigenen »ethischen« Erfahrungen hin (LE S. 7 ff.), sondern auf seine Schlußbemerkungen (ebd. S. 11 f.), wo er die Ansicht, daß eine korrekte logische Analyse von ethischen und religiösen Behauptungen - die sie als Tatsachenbehauptungen erklären würde - jemals gefunden sein könne, ablehnt: »Now when this is urged against me I at once see clearly, as it were in a flash of light, not only that no description that I can think of would do to describe what I mean by absolute value, but that I would reject every significant description that anybody could possibly suggest, *ab initio*, on the ground of its significance. &c.« (F. H.)

7. LE S. 12. (F. H.)

8. LE S. 8. (F. H.)

consciência?[4] Eu responderia: o que quer que você me diga, eu o recusaria não porque a explicação esteja errada, mas porque é uma *explicação*.

Se você me disser algo que seja uma *teoria*, eu digo: Não, não! Não estou interessado. Mesmo que a teoria fosse verdadeira, eu não estaria interessado - ela nunca seria *o* que procuro.

Não se pode ensinar o ético. Se eu pudesse explicar a essência do ético para outra pessoa por meio de uma teoria, o ético não teria valor algum.[5]

Na conclusão da minha palestra sobre ética acabei falando na primeira pessoa;[6] acho que é algo muito importante. Nada pode ser mais constatado aqui; eu só posso emergir como uma personalidade e falar na primeira pessoa.

Para mim, a teoria não tem valor. Uma teoria não me dá nada.

RELIGIÃO

Falar é essencial para a religião? Posso muito bem imaginar uma religião em que não haja proposições doutrinárias, portanto em que não haja conversas. Obviamente, a essência da religião pode não ter nada a ver com o fato de se falar, ou melhor: quando se fala, isto por si só faz parte do ato religioso e não de uma teoria. Portanto, não importa se as palavras são verdadeiras, falsas ou contrassensos. Os discursos da religião também não são *parábolas*; caso contrário, teríamos que ser capazes de dizê-los em prosa também. Batendo contra o limite da linguagem? A linguagem não é nenhuma gaiola.[7]

Só posso dizer: não faço brincadeiras com esta tendência nas pessoas; eu tiro o meu chapéu. E aqui é essencial que esta não seja uma descrição da sociologia, mas que eu fale *de mim mesmo*.

Os fatos não são importantes para mim. Mas o que está no meu coração é o que as pessoas querem dizer quando dizem que "*o mundo está aqui*".[8]

WAISMANN PERGUNTA A WITTGENSTEIN: A existência do mundo está ligada ao ético?

WITTGENSTEIN: Que aqui haja uma conexão é algo que as pessoas sentiram e assim o expressaram: Deus Pai criou o mundo, Deus Filho (ou a palavra que sai de Deus) é o ético. O fato de a divindade ser dividida e considerada novamente como uma indica que aqui há uma conexão.

4. Schlick (op. cit.): "As valorações finais são, portanto, fatos existentes na realidade da consciência humana, e mesmo que a ética fosse uma ciência norma, não deixaria de ser uma ciência dos fatos." (N.E.)

5. No seu manuscrito (MS 107), em 15 de novembro de 1929, Wittgenstein escreveu: "Não se pode levar as pessoas ao bem; só se pode conduzi-los a algum lugar. O bem está fora do reino dos fatos." (N. E.)

6. Talvez Wittgenstein não se refira ao seu informe sobre as suas próprias experiências "éticas" (LE, p. 7ss), mas às suas observações finais (ibid. p. 11s), onde rejeita a visão de que um dia poderia ser encontrada uma análise lógica correta de afirmações éticas e religiosas - que se explicariam como afirmações de fato: "Now when this is urged against me I at once see clearly, as it were in a flash of light, not only that no description that I can think of would do to describe what I mean by absolute value, but that I would reject every significant description that anybody could possibly suggest, *ab initio*, on the ground of its significance. &c. " (N. E.)

7. LE, p. 12. (N. E.)

8. LE, p.8. (N. E.)

deutet an, daß hier ein Zusammenhang besteht.

SOLL

Was heißt das Wort »soll«? Ein Kind soll das tun, heißt: wenn es das nicht tut, dann wird das und das Unangenehme eintreten. Lohn und Strafe. Das Wesentliche daran ist: der andere wird bewogen, etwas zu tun. Ein Soll hat also nur Sinn, wenn hinter dem Soll etwas steht, das ihm Nachdruck gibt - eine Macht, die straft und belohnt. Ein Soll an sich ist unsinnig.[9]

»Moral predigen ist schwer, Moral begründen unmöglich.«[10]

WIDERSPRUCHSFREIHEIT II

Ich habe eine Arbeit von Hilbert gelesen über die Widerspruchsfreiheit.[11] Mir kommt vor, daß diese ganze Frage falsch gestellt ist. Ich möchte fragen: *Kann* denn die Mathematik überhaupt widerspruchvoll sein?

Ich möchte die Leute fragen: Ja, was tut Ihr denn eigentlich? Glaubt Ihr wirklich, daß in der Mathematik Widersprüche stecken?

Die Axiome haben zwei Bedeutungen, wie schon Frege gesehen hat:[12]

1. Die Regeln, *nach* welchen man spielt.
2. Die Ausgangsstellungen im Spiel.

Faßt man die Axiome in der zweiten Bedeutung auf, so kann ich keinen Sinn damit verbinden, daß sie einander widersprechen. Es wäre sehr sonderbar zu sagen: Diese Stellung der Figuren (z.B. im Hilbertschen Formelspiel »0 ≠ 0«) ist ein Widerspruch. Und wenn ich irgendeine Stellung als Widerspruch bezeichne, so hat das jedenfalls für das Spiel *als Spiel* nichts Wesentliches zu bedeuten. Richte ich die Regeln so ein, daß diese Stellung der Figuren nicht eintreten kann, so habe ich damit eben nun ein anderes Spiel gemacht. Aber das Spiel ist Spiel, und ich kann auf keine Weise verstehen, warum man dem Auftreten dieser Figur eine so große Bedeutung beimessen will; man tut ja so, als ob gerade diese Stellung »tabu« wäre. Ich frage demgegenüber: Und was ist denn dabei, wenn diese Figur auftritt?[13]

Ganz anders liegt die Sache, wenn man die Axiome als die Regeln auffaßt, *nach* welchen man spielt. Die Regeln sind - in gewissem Sinn - Aussagen: Sie sagen: Das und das darfst du tun, jenes nicht. Zwei Regeln können einander widersprechen. Denken Sie sich zum Beispiel im Schachspiel, daß eine Regel lauten würde: Unter den und den Bedingungen muß die betreffende Figur genommen werden. Eine andere Regel aber würde sagen: Ein Rössel darf nie genommen

9. Vgl. TLP 6,422. Auch Schlick lehnte den Begriff »das absolute Sollen« aus ähnlichen Gründen ab (a. a. o. S. 81ff.; in der Übersetzung S. 110ff.). (F. H.)

10. »Moral predigen ist leicht, Moral begründen schwer«. Schopenhauer, *Über den Willen der Natur*, S. 140 (Frauenstädt). (F. H.)

11. »0 ≠ 0« kommt vor als ein Symbol für Widerspruch in »Über das Unendliche« (1925) und in »Grundlagen der Mathematik« (1927), *Grundlagen der Geometrie*[7], Leipzig, 1930, Anh. VIII u. IX; aber der Hinweis führt wahrscheinlich auf die »Neubegründung der Mathematik« (1922), wo Hilbert über »eine Metamathematik, die zur Sicherung der Mathematik dient« spricht (*Gesammelte Abhandlungen* III, Berlin, 1935, insb. S. 175). Hier aber ist sein typischer Widerspruch »a ≠ a«. (F. H.)

12. Vgl. z. B. *Grundgesetze der Arithmetik* II, Jena, 1903, § 109. (F. H.)

13. Warum soll denn eine bestimmte Zeichenfigur nicht auftreten dürfen? Warum diese Scheu? Warum tabu? (A. W.).

DEVER

O que significa a palavra “dever”? Uma criança deve fazer isto, significa: se não o fizer, então isto e aquilo desagradável acontecerão. Recompensa e punição. O essencial aqui é: o outro é movido a fazer alguma coisa. Portanto, um dever só faz sentido se houver algo por trás dele que lhe dê força - um poder que puna e recompense. Um dever em si é um contrassenso.[9]

“Pregar a moralidade é difícil, fundamentar a moral é impossível.”[10]

CONSISTÊNCIA II

Eu li um artigo de Hilbert sobre consistência.[11] Parece-me que toda esta questão está mal formulada. Eu gostaria de perguntar: A matemática, afinal, *pode* ser contraditória?

Eu gostaria de perguntar às pessoas: o que é que você está realmente fazendo? Você realmente acha que existem contradições na matemática?

Os axiomas têm dois significados, como Frege já havia visto:[12]

1. As regras *pelas* quais jogamos.
2. As posições iniciais do jogo.

Se tomarmos os axiomas no segundo significado, não posso conectar nenhum sentido com o fato de que eles se contradizem. Seria muito estranho dizer: esta posição das peças (por exemplo no jogo das fórmulas de Hilbert “0 ≠ 0”) é uma contradição. E se designo qualquer posição como uma contradição, então isto não tem nada de essencialmente significativo para o jogo *como um jogo*. Se estabeleci as regras de forma que esta posição das peças não pode ocorrer, acabo de jogar um outro jogo com elas. Mas o jogo é um jogo, e não consigo entender por que alguém gostaria de atribuir tanta importância à manifestação desta configuração; pretende-se que esta configuração em particular seja um “tabu”. Eu pergunto, por outro lado: o que aconteceria se aparecesse esta configuração?[13]

A questão é bem diferente se concebermos os axiomas como as regras *pelas* quais se joga. As regras são - em certo sentido - enunciados: elas dizem: você pode fazer isto e aquilo, mas não aquilo. Duas regras podem se contradizer. Imagine, por exemplo, um jogo de xadrez em que uma regra dissesse: sob tais e tais condições a peça em questão tem que ser tomada. Outra regra, entretanto, diria: um cavalo nunca pode ser tomado. Se a peça em questão for um cavalo, as regras se contradizem; eu não sei o que devo fazer. O que fazemos num caso assim? Muito

9. Cf. TLP 6.422. Schlick também rejeitou o termo “dever absoluto” por razões similaress (op. cit., pp. 81ss.; na tradução inglesa, pp. 110ss.). (N. E.)

10. “A pregação moral é fácil, a fundamentação da moral é difícil”. Schopenhauer, Über den Willen der Natur, p. 140 (Edições Frauenstädt). (N. E.)

11. “0 ≠ 0” aparece como um símbolo de contradição em “Über das Unendliche” (1925) e em “Grundlagen der Mathematik” (1927), *Grundlagen der Geometrie*, 7a. edição, Leipzig, 1930, Anexos VIII e IX; mas a referência provavelmente leva ao “Neubegründung der Mathematik” (1922), onde Hilbert fala sobre “uma metamatemática que serve para salvaguardar a matemática” (*Gesammelte Abhandlungen* III, Berlin, 1935, especialmente p. 175). Mas aqui sua contradição típica é “a ≠ a”. (N. E.)

12. Cf., por exemplo, *Grundgesetze der Arithmetik* II, Jena, 1903, § 109. (N. E.)

13. Por que uma certa configuração de sinais não deveria aparecer? Por que este receio? Por que o tabu? (N. W.).

werden. Wenn nun die betreffende Figur gerade ein Rössel ist, dann widersprechen einander die Regeln; ich weiß nicht, was ich tun soll. Was machen wir in einem solchen Fall? Sehr einfach: Wir führen eine neue Regel ein, und damit ist der Konflikt entschieden.

Ich meine nun: Wenn unter den Spielregeln der Mathematik Widersprüche auftreten, so wäre es die einfachste Sache von der Welt, Abhilfe zu schaffen: Wir brauchen nur eine neue Festsetzung zu treffen, für den Fall, in welchem die Regeln in Konflikt geraten, und die Sache ist erledigt.

Nun muß ich aber hier eine wichtige Bemerkung machen: Ein Widerspruch ist nur dann ein Widerspruch, *wenn er da ist*. Man hat da die Vorstellung, als ob von Anfang an ein Widerspruch in den Axiomen versteckt sein könnte, den niemand gesehen hat, so wie die Tuberkulose: Man ahnt nichts, und eines Tages ist man tot. So meint man nun auch: Eines Tages könnte vielleicht der versteckte Widerspruch ausbrechen, und dann ist die Katastrophe da.

Ich meine: Zu fragen, ob nicht *einmal* die Schlüsse zu einem Widerspruch führen können, hat gar keinen Sinn, solange mir nicht ein Verfahren gegeben ist, den Widerspruch aufzufinden. Solange ich spielen kann, solange kann ich spielen, und alles ist in Ordnung.

In Wahrheit liegt die Sache so: Der Kalkül als Kalkül ist in Ordnung. Es hat gar keinen Sinn, von Widerspruch zu reden. Was man einen Widerspruch nennt, entsteht, sowie man aus dem Kalkül heraustritt und in Prosa sagt: *Also* gilt diese Eigenschaft für alle Zahlen, aber die Zahl 17 hat diese Eigenschaft nicht.

Im Kalkül kann sich der Widerspruch überhaupt nicht äußern.

Ich kann mit den Schachfiguren spielen nach gewissen Regeln. Ich könnte aber auch ein Spiel erfinden, in dem ich mit den Regeln selbst spiele: Die Figuren meines Spieles sind jetzt die Regeln des Schachspiels und die Spielregeln sind etwa die logischen Gesetze. *Dann habe ich wieder ein Spiel und nicht ein Metaspiel*.

Was Hilbert macht, ist Mathematik und nicht Metamathematik.

Es ist wieder ein Kalkül, geradesogut wie ein jeder andere.[14]

Freitag, 26. Dezember 1930 (*bei Schlick*)

STIL DES DENKENS[15]

Sonntag, 28. Dezember 1930 (*bei Schlick*)

WIDERSPRUCHSFREIHEIT III

Das Problem der Widerspruchsfreiheit der Mathematik stammt aus zwei Quellen: 1. Aus den Ideen der nicht-euklidischen Geometrie, wo es sich darum gehandelt hat, nach dem gegebenen Vorbild einer reductio ad absurdum das Parallelenaxiom zu beweisen. 2. Aus den Antinomien von Burali-Forti und von Russell.

Was vor allem den Anstoß für die heutige Beschäftigung mit der Widerspruchsfreiheit gegeben hat, waren die Antinomien. Wenn man heute die Mathematiker fragen würde: »Ja, sagt mir

14. Anzumerken ist, wie nahe wir hier der Idee von „Sprachspielen" sind. Was Wittgenstein noch fehlt, scheint mir, ist die Verbindung zwischen dem Sprachspiel und der Lebensform, in der es sich befindet. (A. U.)

15. Drei Vorderseiten wurden für die Notizen dieser Konversation leer gelassen. (F. H.)

simples: introduzimos uma nova regra e o conflito é resolvido.

Quero dizer agora: se surgirem contradições nas regras do jogo da matemática, seria a coisa mais simples do mundo remediar a situação: só precisamos fazer uma nova estipulação no caso de as regras entrarem em conflito, e o problema acaba.

Mas agora tenho que fazer uma observação importante aqui: uma contradição só é uma contradição *quando ela existe*. Tem-se a ideia de que pode haver uma contradição escondida nos axiomas desde o início e ninguém viu, como uma tuberculose: ninguém suspeita de nada, e um dia alguém morre. Então o que se quer dizer é que: talvez um dia a contradição oculta se espalhe, e aí surge uma catástrofe.

Quero dizer: não adianta perguntar se *eventualmente* as inferências podem levar a uma contradição enquanto não me for dado um método para encontrá-la. Contanto que eu possa jogar, posso jogar contanto esteja tudo bem.

Na verdade, a questão é a seguinte: o cálculo como cálculo está em ordem. Não há nenhum sentido em se falar sobre contradição. O que se chama de contradição surge assim que se desembarca do cálculo e se diz em prosa: *portanto*, esta propriedade vale para todos os números, exceto pelo número 17, que não tem esta propriedade.

A contradição não pode ser expressa de forma alguma no cálculo.

Posso jogar com as peças de xadrez de acordo com certas regras. Mas também poderia inventar um jogo em que eu próprio jogasse com as regras: as peças do meu jogo agora são as regras do jogo de xadrez, e as regras do jogo são, digamos, as leis da lógica. *Então eu tenho novamente um jogo, e não um metajogo.*

O que Hilbert faz é matemática e não metamatemática.

É novamente um cálculo, tão bom quanto qualquer outro.[14]

Sexta-feira, 26 de Dezembro de 1930 (*na casa de Schlick*)

ESTILO DE PENSAMENTO[15]

Domingo, 28 de Dezembro de 1930 (*na casa de Schlick*)

CONSISTÊNCIA III

O problema da consistência da matemática provém de duas fontes: 1. Das ideias da geometria não euclidiana, onde se tratava de demonstrar o axioma das paralelas de acordo com o modelo dado de uma reductio ad absurdum. 2. Das antinomias de Burali-Forti e de Russell.

O que impulsionou, acima de tudo, a preocupação de hoje com a consistência foram as antinomias. Se alguém hoje perguntasse aos matemáticos: "Bem, diga-me por que você está tão interessado nesta questão? Você já encontrou alguma vez uma contradição *na* matemática?",

14. É de se notar quão próximos estamos aqui da ideia de "jogos de linguagem". O que falta ainda a Wittgenstein, pelo que me parece, é a conexão entre o jogo de linguagem e a forma de vida em que se situa. (N. T.)

15. Três páginas foram deixadas em branco no lado anverso para anotações desta conversa. (N. E.)

doch, warum interessiert euch denn diese Frage so sehr? Habt Ihr denn schon je einmal *in* der Mathematik einen Widerspruch angetroffen?«, so würden sie sich vor allem auf die Antinomien der Mengenlehre berufen, und sie sagen das ja auch in Wirklichkeit.

Nun muß man sagen, daß diese Antinomien mit der Widerspruchsfreiheit der Mathematik überhaupt nichts zu tun haben, daß hier gar kein Zusammenhang besteht. Denn die Antinomien sind ja nicht im Kalkül aufgetreten, sondern in der gewöhnlichen Umgangssprache, und zwar darum, weil man die Worte in zweideutiger Weise gebraucht. Die Lösung der Antinomien besteht daher darin, daß man die verschwommene Ausdrucksweise durch eine präzise ersetzt (indem man sich auf die eigentliche Bedeutung der Worte besinnt). Die Antinomien verschwinden also durch eine *Analyse*, aber nicht durch einen *Beweis*.

Wenn die Widersprüche in der Mathematik durch eine Unklarheit entstehen, so kann ich diese *Unklarheit nie durch einen Beweis beheben*. Der Beweis beweist nur, was er beweist. Aber den Nebel kann er nicht heben. Was not tut, ist eine Analyse, aber nicht ein Beweis. Der Beweis kann den Nebel nicht zerstreuen.

Das zeigt schon, daß es einen Widerspruchsfreiheits-Beweis gar nicht geben kann (sofern man sich die Widersprüche der Mathematik von der Art denkt wie die Widersprüche der Mengenlehre), daß der Beweis gar nicht das leisten kann, was man von ihm verlangt.

Bin ich mir über das Wesen der Mathematik unklar, so kann mir kein Beweis helfen. Und bin ich mir über das Wesen der Mathematik im klaren, so kann die Frage nach der Widerspruchsfreiheit überhaupt nicht entstehen. [?]

Die Entdeckung Sheffers[16]

In welchem Sinn war es eigentlich eine Entdeckung, daß man in der Logik mit einer einzigen logischen Konstante auskommt? Was hat Sheffer eigentlich entdeckt?

Stellen Sie sich vor, Frege hätte durch einen Zufall seine logischen Grundgesetze alle in der Form geschrieben:

~ (...) · V · ~ (...)

hätte aber geglaubt, daß er zwei Konstanten braucht. Nun wäre ein anderer gekommen, der das *sieht*, was Frege nicht bemerkt hat, und sagt: Wir kommen ja mit einer einzigen Konstante aus! Was hat er eigentlich entdeckt? Er hat das neue System im alten gesehen. Es kommt dabei wesentlich auf das *Sehen* an: So lange man das System nicht sieht, hat man es nicht. Frege hätte es nicht gehabt, auch wenn er schon zufällig alles in der Multiplizität des neuen Systems geschrieben hätte. Das neue System kann man vom Standpunkt des alten aus nicht suchen. Darum kann es auch durch Umformung *nicht bewiesen* werden.

Es scheint, daß man sagen kann: Wir kommen in der Logik mit drei Konstanten aus und auch mit zwei; kann man auch mit *einer* Konstante auskommen? Das klingt ganz so wie eine rechtmäßige Frage, ist aber keine, weil ich keine Methode habe, das System zu suchen. Nebenbei bemerkt: Man kann ja auch die logischen Konstanten nicht so zählen, wie ich drei Apfel zähle; denn die Apfel bilden Gegenstände, die unter einen Begriff fallen, die logischen Konstanten aber sind eine Struktur. Was ich hier *eine* logische Konstante nenne, hat eine ganz andere Struktur als zwei logischen Konstanten. Was ich zählen kann, sind die Zeichen, und auf die kommt

16. *Transactions of the American Mathematical Society*, 14 (1913), S. 481-8. Von den zwei möglichen Interpretationen der einen logisd1en Konstante wählt Wittgenstein hier die von Nicod (*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 19, 1917-20, S. 32-41) vorgezogene ODER-Form, obwohl er selbst in TLP die UND-Form benutzt hatte. (F. H.)

eles se refeririam principalmente às antinomias da teoria dos conjuntos e, na realidade, é o que eles dizem.

Pois bem, tem que ser dito que essas antinomias não têm absolutamente nada a ver com a consistência da matemática, que não há nenhuma conexão aqui. Porque as antinomias não aparecem no cálculo, mas na linguagem coloquial comum, particularmente porque as palavras são usadas de forma ambígua. Daí que a solução para as antinomias seja a de substituir as formas de expressão nebulosas por uma forma precisa (ponderando sobre o real significado das palavras). As antinomias, portanto, são desfeitas por uma *análise*, não mediante uma *demonstração*.

Se as contradições surgem na matemática por falta de claridade, *nunca poderei superar esta falta de claridade por meio de uma demonstração*. A demonstração só demonstra o que demonstra. Mas ela não consegue dispersar a névoa. Não fazemos análise, só demonstração. A demonstração não pode dissipar a névoa.

Isto já mostra que não pode haver em absoluto uma prova de consistência (na medida em que se pensa nas contradições da matemática como no tipo das contradições da teoria dos conjuntos), em que a prova não pode entregar o que dela se reclama.

Se a natureza da matemática não está clara para mim, nenhuma demonstração pode me ajudar. E se a natureza da matemática está clara para mim, então a questão da consistência não pode surgir de forma alguma. [?]

A Descoberta de Sheffer[16]

Em que sentido foi realmente uma descoberta de que na lógica a gente pode se arranjar com uma única constante lógica? O que Sheffer realmente descobriu?

Imagine se por acaso Frege tivesse escrito todas as suas leis básicas da lógica na forma:

~ (...) · V · ~ (...)

mas tivesse acreditado que precisava de duas constantes. Agora teria vindo uma outra pessoa que *viu* o que Frege não percebeu e disse: a gente pode se arranjar com uma única constante! O que ele realmente descobriu? Ele viu o novo sistema no antigo. Isto está ligado essencialmente ao *ver*: enquanto não se pode ver o sistema, não se o domina. Frege não o dominava, mesmo que tivesse escrito tudo na multiplicidade do novo sistema. Não se pode buscar o novo sistema do ponto de vista do antigo. É por isso que também *não pode ser demonstrado* por transformação.

Aparentemente pode-se dizer: na lógica podemos nos arranjar com três constantes e também com duas; pode-se também quebrar o galho com *uma* constante? Parece uma pergunta legítima, mas não é porque eu tenho nenhum método para procurar no sistema. A propósito: você não pode tampouco contar as constantes lógicas como eu conto três maçãs; pois as maçãs formam objetos que se enquadram em um conceito, mas as constantes lógicas são uma estrutura. O que aqui chamo de *uma* constante lógica tem uma estrutura completamente diferente de duas constantes lógicas. O que posso contar são os sinais, mas eles aqui não importam.

Não pode haver nenhuma demonstração que diga que posso me arranjar com uma constante lógica.

16. *Transactions of the American Mathematical Society*, 14 (1913), pp. 481-8. Das duas interpretações possíveis de uma constante lógica, Wittgenstein escolhe a forma OR, preferida por Nicod (*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 19, 1917-20, pp. 32-41), embora ele próprio tenha utilizado a forma AND no TLP. (N. E.)

es dabei nicht an.

Es kann keinen Beweis geben, der sagt, daß ich mit einer logischen Konstante auskomme.

Wenn man also fragen wollte: »Kann man mit einer einzigen logischen Konstante auskommen?«, oder wenn man beweisen wollte, daß man mit einer einzigen logischen Konstante auskommen kann, so hätte all das keinen Sinn.

Dieses Beispiel erläutert, was ich meine, wenn ich behaupte, daß es einen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Mathematik nicht geben kann und daß, wenn es ihn gäbe, er gar kein prinzipielles Interesse verdienen würde.

⟨*Spielregeln und Konfigurationen des Spiels*⟩

Russell hatte die Meinung, daß seine fünf »primitive propositions«[17] zugleich die Grundkonfigurationen und die Regeln des Weiterschreitens sein sollten. Aber hierin täuschte er sich, und dies zeigte sich darin, daß er selbst weitere Regeln (in Worten!) hinzunehmen mußte.

Wir müssen also unterscheiden: Die Grundkonfigurationen des Kalküls (die Ausgangsstellungen im Spiel) und die Regeln, die angeben, wie wir aus einer Konfiguration zu einer anderen überzugehen haben.

Dies hat schon Frege in seiner Kritik der Theorien von Heine und Thomae erklärt: »Das ist eine Überraschung. Was würde jemand sagen, der nach den Regeln des Schachspiels gefragt hätte, und dem statt aller Antwort eine Gruppe von Schachfiguren auf dem Schachbrett gezeigt würde? Wahrscheinlich, daß er keine Regel darin finden könnte, weil er gar keinen Sinn mit diesen Figuren und mit ihrer Zusammenstellung verbände.« (*Grundgesetze der Arithmetik*, II, § 106, S. 1 13.)

Wenn ich nun den Kalkül als Kalkül nehme, so können die Konfigurationen des Spiels keinen Widerspruch darstellen (es sei denn, daß ich willkiirlich eine im Spiel auftretende Figur »Widerspruch« nenne und sie ausschließe; damit erkläre ich nur, daß ich ein *anderes* Spiel spiele.)[18][19]

Die Idee des Widerspruchs ist - daran halte ich fest - die *Kontradiktion*, und die kann nur im *Wahr-Falsch-Spiel auftreten*, also nur dort, wo wir Aussagen machen.

Das heißt: Der Widerspruch kann nur in den *Spielregeln* auftreten. Ich kann z. B. eine Spielregel haben, die sagt: Der weiße Stein muß über den schwarzen ziehen.

Wenn nun der schwarze am Rand steht, versagt die Regel. Es kann also der Fall eintreten, daß ich nicht weiß, was ich zu tun habe. Die Regel sagt mir nichts mehr. Was würde ich in einem solchen Fall tun? Nichts leichter, als den Widersprudi zu beseiti-

17. Für die fünf wahren »primitive propositions« s. *Principia Mathematica* I, Cambridge, 1910, S. 96-7, *1.2-*1.6. (F. H.)

18. Durch Erlaubnis und Verbot kann ich immer nur *ein Spiel* bestimmen, aber nie *das Spiel*. Was Hilbert mit seinem Beweis zeigen will, ist, daß die Axiome der Arithmetik die Eigenschaften des Spiels haben, und das ist unmöglich. Hilbert möchte quasi beweisen, daß die Kontradiktion *unzulässig* ist. (A. W.)

19. Siehe S. 149 unten. (F. H.)

Portanto, se alguém quisesse perguntar: “Pode-se quebrar o galho com uma única constante lógica?”, ou se quisesse demonstrar que se pode quebrar o galho com uma única constante lógica, nada disso faria qualquer sentido.

Este exemplo elucida o que quero dizer quando afirmo que não pode haver qualquer demonstração de consistência da matemática e que, se houvesse, ela não granjearia nenhum interesse em princípio.

⟨*Regras e Configurações do Jogo*⟩

Russell acreditava que suas cinco “proposições primitivas”[17] deveriam ser tanto as configurações básicas quanto as regras de progressão. Mas ele estava errado sobre isto, o que foi mostrado no fato de que ele mesmo teve que aceitar outras regras (em palavras!).

Portanto, temos que distinguir: as configurações básicas do cálculo (as posições iniciais no jogo) e as regras que especificam como devemos passar de uma configuração para outra.

Frege já explicou isto em sua crítica às teorias de Heine e Thomae: “Isto é uma surpresa. O que diria alguém que perguntasse sobre as regras do jogo de xadrez e, em vez de todas as respostas, fosse mostrado um grupo de peças de xadrez no tabuleiro? Provavelmente ele não conseguiria encontrar uma regra nisto, porque não faz nenhum sentido associar estas peças e sua composição. “(*Leis Básicas da Aritmética*, II, § 106, p. 1 13.)

Se agora tomo o cálculo como um cálculo, as configurações do jogo não podem apresentar nenhuma contradição (a menos que eu arbitrariamente chame uma peça que aparece no jogo de “contradição” e a exclua; isto apenas explica que estou jogando um *outro* jogo).[18][19]

A ideia de contradição - e me apego firmemente a ela - é a da *contradição lógica*, e ela só pode *ocorrer no jogo do verdadeiro-falso*, ou seja, apenas quando fazemos afirmações.

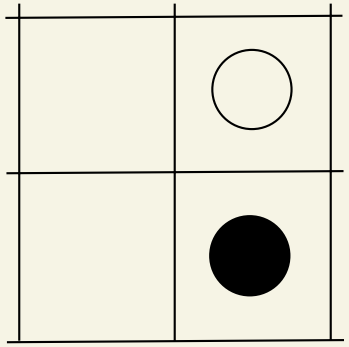
O que significa: a contradição só pode ocorrer nas *regras do jogo*. Eu posso, por exemplo, ter uma regra do jogo que diga: a peça branca tem que se mover pulando sobre a preta.

Se a preta estiver na borda, a regra falha. Então pode acontecer que eu não saiba o que fazer. A regra não me diz mais nada. O que faria neste caso? Nada mais fácil do que eliminar a contradição:

17. Para as cinco “proposições primitivas” verdadeiras, ver *Principia Mathematica* I, Cambridge, 1910, pp. 96-7, * 1.2-*1.6. (N. E.)

18. Com permissão e proibição, só posso determinar *um jogo* de cada vez, mas nunca *o jogo*. O que Hilbert está tentando mostrar com sua prova é que os axiomas da aritmética têm propriedades de jogo, e isto é impossível. Hilbert gostaria de demonstrar, por assim dizer, que a contradição é *inadmissível*. (N. W.)

19. Veja a p. 150, abaixo. (N. E.)



gen: Ich muß eine Entscheidung treffen, also eine *weitere Regel einführen*.

Nebenbei bemerkt: Gesetzt, unter den Regeln würden zwei vorkommen, die einander widersprechen. Ich habe aber ein so schlechtes Gedächtnis, daß ich das nie bemerke, sondern immer eine der beiden Regeln vergesse oder auch abwechselnd mich an die eine halte und dann wieder an die andere. Auch dann würde ich sagen: Es ist alles in Ordnung. Die Regeln sind ja Anweisungen zum Spiel, und solange ich spielen kann, müssen sie in Ordnung sein. Sie hören erst dann auf, in Ordnung zu sein, sobald ich *bemerke*, daß sie einander widersprechen, und das äußert sich nur darin, daß ich sie nicht mehr anwenden kann: denn das logische Produkt der beiden Regeln ist eine Kontradiktion und die Kontradiktion sagt mir nicht mehr, was ich zu tun habe, Der Konflikt tritt also erst dann auf, sobald ich ihn bemerke. Solange ich spielen konnte, war kein Problem da.

Auch in der Arithmetik kommen wir z. B. mit der Aufgabe 0/0 an den »Rand des Schachbrettes«. (Wollte ich sagen: 0/0 = 1, so könnte ich beweisen, daß 3 = 5 ist, käme also mit anderen Spielregeln in Konflikt.)

Wir sehen also: Solange wir den Kalkül aus Kalkül nehmen, kann die Frage der Widerspruchsfreiheit gar nicht ernsthaft auftreten. Vielleicht hängt also die Widerspruchsfreiheit mit der *Anwendung* des Kalküls zusammen? Zu dem Zweck müssen wir uns fragen:

Was heißt es, einen Kalkül anwenden?

Das kann zweierlei heißen:

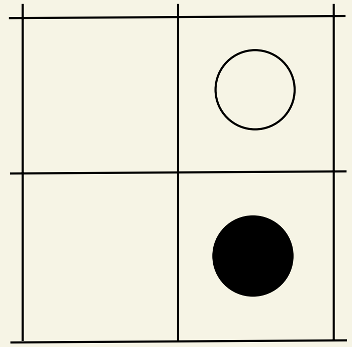
1. Man wendet den Kalkül in der Weise an, daß er die *Grammatik* einer Sprache ergibt. Dem, was die Regel erlaubt oder verbietet, entspricht dann in der Grammatik das Wort »*sinnvoll*« und »*sinnlos*«. Als Beispiel diene: die *euklidische Geometrie*, aufgefaßt als das System der syntaktischen Regeln, nach welchen wir räumliche Dinge beschreiben.

»Durch zwei Punkte kann eine Gerade gezogen werden« bedeutet: Die Aussage, die von der Geraden spricht, die durch diese zwei Punkte bestimmt ist, hat Sinn, ob sie nun wahr oder falsch ist. [Das Wort »kann« hat zwei Bedeutungen: »Ich kann 10 kg heben«, »Ich kann durch zwei Punkte eine Gerade ziehen.«]

Der Spielkonfiguration entspricht eine Regel der Syntax. [Können die Regeln der Syntax einander widersprechen?] Die Syntax kann nicht gerechtfertigt werden.

2. Die Anwendung des Kalküls kann so geschehen, daß den Konfigurationen des Kalküls *wahre* und *falsche Sätze* entsprechen. Dann ergibt der Kalkül eine Theorie, die etwas beschreibt.

Newtons drei Gesetze haben eine ganz andere Bedeutung als die Geometrie. Für sie gibt es eine Verifikation, nämlich durch die physikalischen Experimente. Für ein Spiel aber gibt es kei-



tenho que tomar uma decisão, então tenho que *introduzir uma outra regra*.

A propósito: suponha que entre as regras haja duas que se contradigam. Mas tenho uma memória tão ruim que nunca noto, e sempre esqueço uma das duas regras ou alterno entre seguir uma e depois voltar para a outra. Mesmo assim eu diria: está tudo bem. As regras são instruções para o jogo e, enquanto eu puder jogar, elas têm que estar em ordem. Elas só deixam de estar bem assim que percebo que se contradizem, e isto só se manifesta no fato de não poder mais aplicá-las: porque o produto lógico das duas regras é uma contradição e a contradição não me diz mais o que tenho que fazer, então o conflito só surge assim que percebo. Contanto que pudesse jogar, não haveria problema.

Também na aritmética chegamos na "borda do tabuleiro de xadrez", por exemplo com a tarefa 0/0. (Se eu quisesse dizer: 0/0 = 1, poderia demonstrar que 3 = 5, o que entraria em conflito com outras regras do jogo.)

Assim vemos: enquanto considerarmos o cálculo como cálculo, a questão da consistência não pode surgir seriamente. Então talvez a consistência esteja relacionada à *aplicação* do cálculo? Para isto devemos nos perguntar:

O que Significa Aplicar um Cálculo?

Isto pode significar duas coisas:

1. O cálculo é aplicado de modo a fornecer a *gramática* de uma linguagem. O que a regra permite ou proíbe então corresponde na gramática às palavras "*significativo*" e "*sem sentido*". Tomemos como exemplo: a *geometria euclidiana* concebida como o sistema de regras sintáticas segundo as quais descrevemos objetos espaciais.

"Uma linha reta pode ser traçada através de dois pontos" significa: a afirmação que fala da linha reta determinada por estes dois pontos faz sentido, seja ela verdadeira ou falsa. [A palavra "pode" tem dois significados: "Posso levantar 10 kg", "Posso traçar uma linha reta por meio de dois pontos."]

A configuração do jogo corresponde a uma regra da sintaxe. [As regras da sintaxe podem se contradizer?] A sintaxe não pode ser justificada.

2. A aplicação do cálculo pode ser feita de forma que as proposições *verdadeiras* e *falsas* correspondam às configurações do cálculo. Então o cálculo resulta em uma teoria que descreve algo.

As três leis de Newton têm um significado completamente diferente da geometria. Há uma ne Rechtfertigung. Das ist sehr wichtig. Auch die Geometrie kann man so auffassen, indem man sie als die Beschreibung der tatsächlichen Messungen nimmt. (?)

Jetzt haben wir Aussagen vor uns, und die Aussagen können einander in der Tat widersprechen.

Ob die Theorie etwas beschreiben *kann*, hängt davon ab, ob das logische Produkt der Axiome eine Kontradiktion ist. Entweder ich sehe sofort, daß sie eine Kontradiktion bilden, dann ist die Sache klar. Wie aber, wenn ich das nicht direkt sehe? Dann liegt ein *versteckter* Widerspruch vor.

Z.B.: Die Axiome Euklids und das Axiom: Die Winkelsumme im Dreieck = 181° . Hier sehe ich nicht sofort den Widerspruch; denn ich sehe ja nicht sofort, daß aus den Axiomen eine Winkelsumme von 180° folgt.

Solange wir uns im Kalkül bewegen, hätten wir keinen Widerspruch: Denn w = 180°, w = 181° widersprechen einander durchaus nicht. Wir können eben zwei verschiedene Bestimmungen treffen. Wir können nun sagen: Der Kalkül ist auf alles anwendbar, worauf er anwendbar ist. Ja hier sogar wäre noch eine Anwendung denkbar, z.B. in der Art, daß die Winkelsumme im Dreieck, nach einer Methode gemessen, 180°, nach einer anderen 181° beträgt. Es kommt nur darauf an, ein Gebiet zu finden, dessen Beschreibung die Multiplizität fordert, welche die Axiome besitzen.

Bemerkung: Der Widerspruch muß *kontradiktorisch* sein, nicht konträr.

Z. B. »Dieser Fleck ist grün« und »Dieser Fleck ist rot« widersprechen einander nicht, solange wir nicht eine weitere Regel hinzufügen, welche bewirkt, daß ihr logisches Produkt eine Kontradiktion wird.

Wenn nun in einer Theorie eine Kontradiktion eintritt, so wiirde das heißen, daß sich die Sätze der Theorie nicht mehr übersetzen lassen in Aussagen über Galvanometernadelabweichungen etc. Es würde z. B. herauskommen, daß die Nadel ruhig bleibt oder abgelenkt wird, und diese Theorie könnte also nicht verifiziert werden.[20]

Die Maxwellschen Gleichungen stellen nicht, wie die geometrischen, einen Kalkiil dar, sondern sie sind ein Stück, ein Teil eines Kalküls.

Was heißt es, die Mathematik muß »gesichert werden?[21] Was würde denn geschehen, wenn die Mathematik gesichert wäre? Ist es denn überhaupt eine Aussage, daß die Axiome widerspruchsfrei sind?

Kann man nach einem Widerspruch suchen? Nur dann, wenn es eine Methode des Suchens gibt. Ob man jemals dadurch, daß man nach den Regeln weiterschreitet, zu einem Widerspruch kommen wird - das kann gar keine Frage sein.

Ich glaube, das ist das Wesentliche, worauf alles in der Frage der Widerspruchsfreiheit ankommt.

Regeln sind in gewissem Sinn Aussagen: »Du darfst das und das tun«. Wo man Regeln hat, kann man immer zu Beschreibungen von derselben Multiplizität übergehen, indem man z. B. beim Schachspiel beschreibt, wie die Menschen spielen. Regeln können daher einander widerstreiten, wenn die entsprechenden Aussagen einander widersprechen.

---

20. Es könnte etwas herauskommen wie: »Die Nadel wird nach rechts abgelenkt«, ohne daß gesagt wird, von welcher Seite die Nadel betrachtet werden soll. (A. W.)

21. A. a. o. (s. oben, S. 1 1 9 Anm.). (F. H.)

verificação para elas, a saber, através de experimentos físicos. Mas não há justificativa para um jogo. Isto é muito importante. A geometria também pode ser interpretada desta forma, tomando-a como a descrição de medições reais. (?)

Agora temos afirmações diante de nós, e afirmações podem de fato contradizer-se.

Se a teoria *pode* descrever algo depende de saber se o produto lógico dos axiomas é uma contradição. Ou vejo imediatamente que eles estão formando uma contradição, então a questão está clara. Mas e se eu não vir imediatamente? Então, há uma contradição *oculta*.

Por exemplo: os axiomas de Euclides e o axioma: a soma dos ângulos de um triângulo = 181°. Aqui eu não vejo imediatamente a contradição; pois não vejo imediatamente que os axiomas resultem em uma soma de ângulos de 180°.

Na medida em que avançamos para dentro do cálculo, não temos nenhuma contradição: porque s = 180°, s = 181° não se contradizem de forma alguma. Podemos apenas fazer duas determinações diferentes. Podemos agora dizer: o cálculo é aplicável a tudo o que é aplicável. Na verdade, uma aplicação seria mesmo concebível aqui, por exemplo, da maneira que a soma dos ângulos em um triângulo, medido de acordo com um método, é de 180°, e, de acordo com outro, de 181°. Tudo o que importa é encontrar um domínio cuja descrição exija a multiplicidade possuída pelos axiomas.

Nota: a contradição deve ser *logicamente contraditória*, não contrária.

Por exemplo, “Este ponto é verde” e “Este ponto é vermelho” não se contradizem, a menos que adicionemos outra regra que torne seu produto lógico uma contradição.

Se ocorrer uma contradição em uma teoria, isto significaria que as proposições da teoria não podem mais ser traduzidas em afirmações sobre desvios da agulha do galvanômetro etc. Por exemplo, verifica-se que a agulha permanece estável ou está alterada e, portanto, esta teoria não pôde ser verificada.[20]

As equações de Maxwell não representam um cálculo como os geométricos, mas são um pedaço, uma parte de um cálculo.

O que significa que a matemática deve “ser assegurada?”[21] O que aconteceria se a matemática fosse assegurada? É realmente uma afirmação de que os axiomas são consistentes?

Você pode procurar por uma contradição? Somente se houver um método de pesquisa. Se algum dia se chegará a uma contradição procedendo de acordo com as regras - isto não pode ser uma questão.

Acho que isto é o essencial em tudo o que abrange a questão da consistência.

Em certo sentido, as regras são afirmações: “Você pode fazer isto e aquilo”. Onde existem regras, pode-se sempre passar para descrições da mesma multiplicidade, por exemplo o jogo de xadrez descreve como as pessoas jogam. As regras podem, portanto, entrar em conflito umas com as outras se as afirmações correspondentes se contradisserem.

---

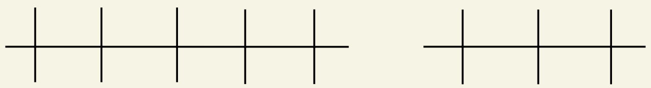
20. Você pode obter algo como “A agulha está alterada para a direita” sem dizer de que lado olhar a agulha. (N. W.)

21. Ver acima, nota de rodapé da p. 119. (N. E.)

⟨*Unabhängigkeit I*⟩

WAISMANN FRAGT WITTGENSTEIN: Hat es denn nicht einen Sinn, sich Fragen in Beziehung auf ein Axiomen-System vorzulegen? Betrachten wir z.B. den Aussagen-Kalkül, den Russell aus fünf Grundsätzen ableitet. Bernays hat gezeigt, daß einer dieser Grundsätze entbehrlich ist und daß schon vier ausreichen. Er hat weiter gezeigt, daß diese Grundsätze ein »vollständiges System« bilden, d. h., daß die Hinzufügung eines weiteren Grundsatzes, der aus diesen vier nicht ableitbar ist, jeden beliebig hingeschriebenen Satz ableitbar macht.[22] Das kommt nämlich darauf hinaus, daß aus der Kontradiktion jeder Satz folgt. Ist das nun nicht eine *inhaltliche Einsicht* in den Russellschen Kalkül? Oder ich nehme einen anderen Fall: Ich wähle drei Grundsätze aus. Aus ihnen kann ich nicht dieselbe Klasse von Sätzen ableiten wie aus allen fünf. Ist das nicht eine inhaltliche Einsicht? Kann man also den Nachweis der Widerspruchsfreiheit nicht auch als eine inhaltliche Erkenntnis ansehen?

WITTGENSTEIN: Wenn ich zuerst drei Sätze nehme und dann fünf Sätze, so kann ich überhaupt die Klassen der Schlußfolgerungen nicht miteinander vergleichen, es sei denn, daß ich ein *neues System* bilde, in dem beide Gruppen vorkommen.



Es ist also nicht so, daß ich die beiden Systeme - das mit drei Grundsätzen und das mit den fünf Grundsätzen - vor mir habe und sie nun von außen her miteinander vergleichen. Ich kann das ebensowenig, wie ich etwa die ganzen Zahlen und die rationalen Zahlen miteinander vergleichen kann, solange ich sie nicht in *ein* System gebracht habe. Ich gewinne also auch nicht eine inhaltliche Einsicht, sondern was ich tue, ist, daß ich wieder einen Kalkül konstruiere. Und in diesem Kalkül kommt ja auch gar nicht der Satz vor: »Die eine Klasse ist umfassender als die andere.« Das ist die Prosa, die den Kalkül begleitet.

Über die Mathematik kann man keinen prinzipiellen Aufschluß dadurch bekommen, daß man erst das Ergebnis einer Theorie abwartet.

Ramsey hat z.B. geschrieben, daß es ein führendes Problem der mathematischen Logik gebe, das Entscheidbarkeitsproblem.[23] Dieses Problem müsse erst gelöst sein, ehe man wisse, ob der Kalkül in Ordnung ist. Darauf würde ich sagen: Solche *»führende Probleme« kann es nicht geben!* Die Frage, ob das, was ich da tue, berechtigt ist oder nicht, darf nicht davon abhängen, was einer im Kalkül herausrechnen wird.

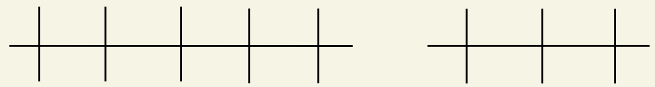
Kann man fragen: Wann habe ich den Kalkül angewendet? Kann es sein, daß ich nicht weiß,

22. *Mathematische Zeitschrift* 25, 1926, S. 305-20, (F. H.)
23. In »On a Problem of Formal Logic«, 1928: s. *Foundations of Mathematics*, London, 1930, S. 82. (F. H.)

⟨*Independência I*⟩

WAISMANN PERGUNTA A WITTGENSTEIN: Não faz sentido fazer perguntas relacionadas a um sistema de axiomas? Considere, por exemplo, o cálculo proposicional que Russell deriva de cinco axiomas. Bernays mostrou que um destes axiomas é dispensável e que quatro são suficientes. Ele também mostrou que estes axiomas formam um "sistema completo"; ou seja, a adição de um outro axioma, que não pode ser derivado destes quatro, torna derivável qualquer proposição escrita arbitrariamente.[22] Pois isto redunda em que toda proposição se segue da contradição. Isto não é afinal uma *visão do conteúdo* do cálculo de Russell? Ou tomo outro caso: escolho três axiomas. Não posso derivar a mesma classe de proposições deles como de todos os cinco. Isto não é uma visão do conteúdo? Portanto, a prova de consistência também não pode ser vista como um conhecimento do conteúdo?

WITTGENSTEIN: Se eu primeiro tomar três proposições e depois cinco proposições, não posso comparar as classes de consequências derivacionais de forma alguma, a menos que eu forme um *novo sistema* em que ambos os grupos ocorram.



Portanto, não é como se eu tivesse os dois sistemas - aquele com três axiomas e aquele com cinco axiomas - diante de mim, e agora os comparo um com o outro do lado de fora. Não posso fazer isto mais do que posso comparar os números inteiros e os números racionais uns com os outros, desde que não os tenha introduzido em *um* sistema. Portanto, não obtenho uma visão do conteúdo, senão o que faço é construir novamente um cálculo. E neste cálculo não ocorre de jeito nenhum a proposição: "Uma classe é mais abrangente que a outra." Isto é a prosa que acompanha o cálculo.

Não se pode obter nenhuma informação fundamental sobre a matemática esperando primeiro pelo resultado de uma teoria.

Ramsey escreveu, por exemplo, que havia um problema principal da lógica matemática, o problema da decidibilidade.[23] Este problema deve ser resolvido primeiro, antes que se saiba se o cálculo está em ordem. Sobre isto então eu diria: não pode haver esses "problemas principais"! A questão de saber se o que estou fazendo é justificado ou não, não pode depender do que alguém vai descontar no cálculo.

Pode-se perguntar: quando apliquei o cálculo? Será que não sei se apliquei o cálculo e tenho que esperar primeiro pela prova de consistência?

22. *Mathematische Zeitschrift* 25, 1926, pp. 305-20, (N. E.)
23. Em »On a Problem of Formal Logic«, 1928: cf.. *Foundations of Mathematics*, London, 1930, p. 82. (N. E.)

ob ich den Kalkül angewendet habe und erst den Nachweis der Widerspruchsfreiheit abwarten muß?

Worüber ich immer mit Moore diskutiere, das ist die Frage: Kann die logische Analyse erst erklären, was wir mit den Sätzen der Umgangssprache meinen? Moore neigt dazu. Wissen also die Leute nicht, was sie meinen, wenn sie sagen: »Heute ist es klarer als gestern« ? Müssen wir da erst auf die logische Analyse warten? Was für eine höllische Idee! Die Philosophie soll mir erst erklären, was ich mit meinen Sätzen meine und ob ich etwas mit ihnen meine. Ich muß natürlich den Satz verstehen können, ohne die Analyse zu kennen.

Dienstag, 30. Dezember 1930 (*bei Schlick*)

⟨WIDERSPRUCHSFREIHEIT IV⟩

⟨*Frege und Wittgenstein I*⟩

WAISMANN LIEST FREGE VOR:

Grundgesetze der Arithmetik, II, § 117 : » . . . könnten wir die Gruppe >0 : 0 = 3< herstellen und ebenso auch die Gruppe >0 : 0 = 4< . . . Aus diesen beiden könnten wir dann weiter die Gruppe >3 = 4< gewinnen. Und hierin liegt vielleicht der Grund für Thomaes Ausspruch, daß die Division nicht immer eindeutig, *also* (?)[24] nicht widerspruchsfrei vollzogen werden könne. Aber hier in der formalen Arithmetik liegt zunächst gar kein Widerspruch vor. Warum sollte nicht eine Gruppe wie >3 = 4< erlaubt sein? . . . Eine Figurengruppe wie >3 = 4< hinzuschreiben, ist bisher . . . nicht verboten worden. Erst wenn man ein solches Verbot erläßt, entsteht ein Widerspruch, oder besser Widerstreit der Regeln, die teils verbieten, teils erlauben.«

Ebda. § 118: »Ferner muß es auffallen, daß von einer Figur die Widerspruchsfreiheit ausgesagt wird. Es würde seltsam berühren, wenn hinsichtlich einer Schachfigur der Argwohn laut würde, sie könnte einen Widerspruch enthalten . . . . . . so sehen wir, daß ein Widerstreit, der etwa zwischen den Regeln des Schachspiels obwaltete, in das Innere einer Schachfigur verlegt erschiene. Um also zu einem Verständnis zu gelangen, werden wir den Widerspruch wieder zurück in die Regeln verlegen müssen.«

WITTGENSTEIN: Was dem Naiven vor allem dabei auffallen muß, ist, daß sich die Mathematiker gerade immer nur vor *einem* Ding fürchten, das für sie eine Art Alpdruck[25] ist, vor dem Widerspruch. Sie fürchten sich z. B. nicht im geringsten davor, daß ein Satz eine Tautologie sein könnte, obwohl doch die Kontradiktion nichts Schlechteres ist als die Tautologie. In der Logik hat die Kontradiktion genau dieselbe Bedeutung wie die Tautologie, und ich könnte die Logik genausogut mit Kontradiktionen studieren. Die Kontradiktion und die Tautologie *sagen* ja nichts, sondern sie sind nur eine Methode, die logischen Zusammenhänge zwischen den Aus-

24. Das Fragezeichen ist Waismanns Art das auszudrücken, was Frege in der folgenden Anmerkung sagt: »Hierbei fällt ‘also’ auf, da ja das Ausziehen einer Quadratwurzel im allgemeinen nicht vollzogen werden kann, ohne daß dadurch ein Widerspruch entstände.« (F. H.)
25. “nightmare” (A. W.)

O que sempre discuto com Moore é a questão: a análise lógica pode explicar o que queremos dizer com as proposições da linguagem ordinária? Moore se inclina a isto. Portanto, as pessoas não sabem o que querem dizer quando dizem: “Hoje está mais claro do que ontem”? Temos que esperar pela análise lógica? Que ideia incrível! A filosofia deve me explicar primeiro o que quero dizer com minhas proposições, e se quero dizer alguma coisa com elas. Claro que devo ser capaz de compreender a proposição sem conhecer a análise.

Terça-feira, 30 de Dezembro de 1930 (*na casa de Schlick*)

⟨CONSISTÊNCIA IV⟩

⟨*Frege e Wittgenstein I*⟩

WAISMANN LÊ FREGE EM VOZ ALTA:

Grundgesetze der Arithmetik, II, § 117: “. . . poderíamos obter o grupo >0 : 0 = 3< e também o grupo >0 : 0 = 4< . . . Destes dois poderíamos então chegar ainda ao grupo >3 = 4<. E esta talvez seja a razão para Thomae dizer que a divisão nem sempre pode ser inequívoca, *portanto* (?)[24] de maneira não consistente. Mas aqui, na aritmética formal, não há, a princípio, contradição alguma. Por que um grupo como >3 = 4< não deve ser permitido? . . . Até agora, escrever um grupo de figuras como >3 = 4< . . . não foi proibido. Somente quando tal proibição é emitida é que surge uma contradição, ou melhor ainda, um conflito das regras, que parcialmente proíbem e parcialmente permitem.”

Ibid. § 118: “Além disso, deve-se notar que a consistência é predicada sobre uma peça do jogo. Seria estranhamente comovente se surgisse a suspeita de que uma peça de xadrez contenha uma contradição. . . . . . assim, vemos que um conflito que prevalece entre as regras do jogo de xadrez parece ter sido transferido para o interior de uma peça de xadrez. Portanto, para chegar-se a um entendimento, teremos que realocar a contradição de volta nas regras.”

WITTGENSTEIN: O que os ingênuos têm que notar acima de tudo é que os matemáticos sempre têm medo de apenas *uma* coisa, que para eles é uma espécie de pesadelo,[25] a contradição. Eles não têm nem um pouco de medo, por exemplo, de que uma proposição possa ser uma tautologia, embora a contradição não seja nada pior do que a tautologia. Na lógica, contradição tem exatamente o mesmo significado que tautologia, e eu poderia muito bem estudar lógica com contradições. A contradição e a tautologia nada *dizem*, são apenas um método de demonstrar as conexões lógicas entre as afirmações.[26]

Sempre se diz: “o princípio da contradição”. Na verdade, acredito que o medo da contradi-

24. O ponto de interrogação é a maneira de Waismann expressar o que Frege diz no seguinte comentário: “Aqui, ‘então’, isto nos chama a atenção, uma vez que em geral a extração de uma raiz quadrada não pode ser realizada sem criar uma contradição.” (N. E.)
25. “Nightmare” (N. W.)
26. Com este pensamento Wittgenstein antecipa a possibilidade de existência de uma lógica paraconsistente. (N. T.)

sagen zu demonstrieren.[26]

Es heißt immer: »der Satz vom Widerspruch«. Ich glaube tatsächlich, daß die Furcht vor der Kontradiktion damit zusammenhängt, daß man sie als einen *Satz* auffaßt:

»~ (p. ~ p)«

Ich kann den Satz vom Widerspruch ohne weiteres als eine Regel auffassen: ich verbiete nämlich die Bildung des logischen Produktes »p. ~ p«. Aber die Tautologie[27] »~ (p. ~ p)« drückt nicht etwa dieses Verbot aus. Wie denn auch? Sie sagt ja nichts, während die Regel etwas sagt.

WAISMANN WIEDERHOLT WITTGENSTEIN SEINE FRAGE: Sie sagten, daß ich durch Erlaubnis und Verbot immer nur *ein* Spiel bestimmen kann, aber nie *das* Spiel. Ist das wirklich richtig?[28] Denken Sie sich z. B. den Fall, daß ich beim Schachspiel jeden Zug erlaube und nichts verbiete - wäre das dann noch ein Spiel? Müssen also nicht doch die Regeln des Spieles gewisse Eigenschaften haben, damit sie überhaupt ein Spiel bestimmen? Könnte man nun die Forderung nach Widerspruchsfreiheit nicht so auffassen, daß da durch das »tautologische« Spiel - das Spiel, in dem alles erlaubt ist - ausgeschlossen wird? Wenn nämlich die Formel »$0 \neq 0$« durch einen rechtmäßigen Beweis ableitbar wird, und wenn wir ferner mit Hilbert das Axiom »$0 \neq 0 \rightarrow \mathfrak{A}$« hinzunehmen, wo $\mathfrak{A}$ eine beliebige Formel bedeutet, so können wir aus der Schlußfigur

$$\begin{array}{c} 0 \neq 0 \\ 0 \neq 0 \rightarrow \mathfrak{A} \\ \hline \mathfrak{A} \end{array}$$

die Formel »$\mathfrak{A}$« entnehmen und sie ebenfalls hinschreiben.[29] Das heißt aber, in diesem Fall kann *jede* Formel abgeleitet werden, und damit verliert das Spiel seinen Charakter und sein Interesse.

WITTGENSTEIN: Durchaus nicht! Hier liegt ein Irrtum vor, nämlich eine Verwechslung von »Spielregel« mit »Konfiguration der Spielfiguren«. Die Sache liegt so: Das Spiel ist tautologisch, wenn die *Spielregeln* tautologisch sind (wenn sie also nichts mehr erlauben oder verbieten), aber das ist hier nicht der Fall. Auch dieses Spiel hat seine bestimmten Spielregeln; es ist ein Spiel unter vielen, und daß die Figur »$0 \neq 0$« dabei entsteht, ist ganz nebensächlich.

Es ist eben eine Figur, die in *diesem* Spiel entsteht, und wenn ich sie ausschließe, so habe ich ein *anderes* Spiel vor mir. Aber nicht: Ich habe im ersten Fall kein Spiel, im zweiten Fall aber ja ein Spiel vor mir. Es ist ja klar: Eine Klasse von Regeln und Verboten grenzt an eine andere Klasse von Regeln und Verboten an; aber das *Spiel grenzt nicht an das Nichtspiel an*. Das »tautologische« Spiel muß sich als Grenzfall des Spiels ergeben, als seine natürliche Grenze. Das System der Spiele muß von innen her begrenzt sein, und diese Begrenzung besteht eben darin, daß die *Spielregel verschwindet*. Diesen Grenzfall kann ich nicht dadurch erhalten, daß ich nun selbst bestimmte Regeln und Verbote aufstelle; denn eben damit bestimme ich ja wieder ein Spiel unter vielen. Wenn ich also sage: Die Figur »$0 \neq 0$« soll zugelassen sein, so gebe ich damit wieder eine Regel an, ich bestimme ein Spiel, nur ein anderes, als wenn ich diese Figur ausschließe.

Also: ich kann durch Regeln nie *das* Spiel bestimmen, sondern immer nur *ein Spiel*.

WAISMANN FRAGT WITTGENSTEIN: Gibt es eine Theorie des Schachspiels? Ja. Dann können wir diese Theorie doch dazu verwenden, um mit ihrer Hilfe Aufschlüsse über die Mögli-

26. Mit diesem Gedanken nahm Wittgenstein die Möglichkeit der Existenz einer parakonsistenten Logik vorweg. (A. U.)

27. Waismann schrieb hier »Kontradiktion«, zweifellos ein Schreibfehler. (F. H.)

28. Siehe oben, S. 141. (F. H.)

29. A. a. O. (s. oben, S. 135 Anm.), S. 205, (F. H.)

ção está relacionado a tomá-la como uma proposição:

"~ (p. ~ p)"

Posso tomar o princípio da contradição como regra sem mais delongas: proíbo a formação do produto lógico "p. ~ p". Mas a tautologia[27] "~ (p. ~ p)" não expressa esta proibição. Como pode ser isto? Ela não diz nada, enquanto a regra diz alguma coisa.

WAISMANN REPETE SUA PERGUNTA A WITTGENSTEIN: você disse que, por meio de permissão e proibição, eu só posso determinar *um* jogo por vez, mas nunca *o* jogo. Isto está realmente certo?[28] Imagine, por exemplo, o caso de que eu permita todos os movimentos no jogo de xadrez, e nada proíba - seria isto ainda um jogo? Portanto, as regras do jogo não têm que ter certas propriedades para que afinal defina um jogo? A exigência de consistência não poderia ser concebida de forma a excluir o jogo "tautológico" - o jogo em que tudo é permitido? Ou seja, se a fórmula "$0 \neq 0$" pode ser deduzida por uma demonstração legítima, e se também adicionarmos, com Hilbert, o axioma "$0 \neq 0 \rightarrow \mathfrak{A}$", onde $\mathfrak{A}$ significa qualquer fórmula, podemos tomar a fórmula "$\mathfrak{A}$" da forma dedutiva

$$\begin{array}{c} 0 \neq 0 \\ 0 \neq 0 \rightarrow \mathfrak{A} \\ \hline \mathfrak{A} \end{array}$$

e do mesmo modo anotá-la.[29] Mas isto significa que, neste caso, *qualquer* fórmula pode ser derivada, e com isto o jogo perde seu caráter e seu interesse.

WITTGENSTEIN: De forma alguma! Há um erro aqui, nomeadamente uma confusão de "regras do jogo" com "configuração das peças do jogo". O problema é o seguinte: o jogo é tautológico quando as *regras do jogo* são tautológicas (ou seja, quando elas não permitem ou proíbem mais nada), mas este não é o caso aqui. Este jogo também tem suas próprias regras específicas; é um jogo entre muitos, e o fato de que surge o número "$0 \neq 0$" é totalmente secundário.

É apenas uma figura que surge *neste* jogo e, se a excluo, tenho *outro* jogo diante de mim. Mas não: no primeiro caso não tenho jogo, no segundo caso tenho um jogo diante de mim. Pois está claro: uma classe de regras e proibições faz fronteira com outra classe de regras e proibições; mas o *jogo não faz fronteira com o não-jogo*. O jogo "tautológico" tem que se produzir como caso limite do jogo, como o seu limite natural. O sistema de jogos tem que ser delimitado por dentro, e esta limitação consiste justamente no fato de as *regras do jogo desaparecerem*. Não posso sustentar este caso limite estabelecendo eu mesmo certas regras e proibições; porque com isto determino novamente um jogo entre muitos. Então quando digo: a configuração "$0 \neq 0$" deve ser permitida, estou dando novamente uma regra, eu determino um jogo, só que um diferente daquele em que se excluiria esta configuração.

Portanto: nunca posso determinar *o* jogo por meio de regras, apenas sempre *um jogo*.

WAISMANN PERGUNTA A WITTGENSTEIN: Existe uma teoria do jogo de xadrez? Sim. Então, podemos usar esta teoria para obter informações sobre as possibilidades do jogo com sua ajuda - por exemplo, se posso dar xeque-mate no rei em oito lances em uma certa constelação do tabuleiro de xadrez, e assim por diante. Se existe uma teoria do jogo de xadrez, então não vejo por que não deveria haver também uma teoria do jogo da aritmética e por que não

27. Waismann escreve aqui "contradição", mas é sem dúvida um lapso na escrita. (N. E.)

28. Ver, acima, p. 142. (N. E.)

29. Op. cit (ver acima nota da p. 136), p. 206. (N. E.)

chkeiten im Spiel zu bekommen - z. B. ob ich, bei einer bestimmten Konstellation auf dem Schachbrett den König in acht Zügen mattsetzen kann, und dergleichen mehr. Wenn es nun eine Theorie des Schachspiels gibt, dann sehe ich nicht ein, warum es nicht auch eine Theorie des Arithmetikspiels geben sollte und warum wir die Sätze dieser Theorie nicht dazu verwenden sollten, inhaltliche Aufschlüsse über die Möglichkeiten dieses Spiels zu erhalten. Diese Theorie ist die Metamathematik Hilberts.

WITTGENSTEIN: Das, was man die » Theorie des Schachspiels« nennt, ist nicht eine Theorie, die etwas beschreibt, sondern sie ist eine Art Geometrie. Sie ist natürlich wieder ein Kalkül und nicht eine Theorie.

Um das klar zu machen, frage ich Sie: Besteht Ihrer Meinung nach ein Unterschied zwischen den zwei folgenden Sätzen: »Ich kann in acht Zügen dorthin kommen« und: »Ich habe mittels der Theorie bewiesen, daß ich in acht Zügen dorthin kommen kann«? Nein! Denn wenn ich in der Theorie statt des Schachbrettes mit seinen Figuren einen Symbolismus verwende, so besteht ja der Nachweis, daß ich in acht Zügen dorthin kommen kann, darin, daß ich im Symbolismus wirklich dorthin komme, daß ich also nun mit Zeichen das tue, was ich auf dem Schachbrett mit den Figuren tue. Wenn ich die Züge ausführe und wenn ich ihre Möglichkeit beweise - so habe ich im Beweis noch einmal dasselbe gemacht. Ich habe die Züge eben nun symbolisch ausgeführt. Was fehlt, ist tatsächlich nur die wirkliche Bewegung; und darüber sind wir uns ja einig, daß die Verschiebung der Holzklötzchen auf dem Brett etwas Unwesentliches ist.

Ich mache im Beweis dasselbe, was ich im Spiel mache, geradeso, wie wenn ich sage: Sie, Herr Waismann, machen eine Rechnung, ich aber will vorher sagen, welche Ziffern bei Ihnen herauskommen werden: dann mache ich eben die Rechnung noch einmal, nur eventuell mit anderen Zeichen (oder auch mit denselben Zeichen, die ich nur anders auffasse). Ich kann das Ergebnis einer Rechnung nun wieder *berechnen*; ich kann nicht auf einem gänzlich anderen Weg zu demselben kommen. Es ist nicht so, daß Sie der Rechner sind und ich durch eine *Theorie* das Ergebnis Ihrer Rechnung erkenne. Und geradeso verhält es sich mit der *»Theorie des Schachspiels«*.

Wenn ich also in der » Theorie« feststelle, daß die und die Möglichkeiten bestehen, so bewege ich mich wieder im Spiel, aber nicht in einem Metaspiel. Jedem Schritt des Kalküls entspricht ein Zug im Spiel, und der ganze Unterschied besteht nur in der mechanischen Bewegung des Holzklötzchens.

Es ist übrigens sehr wichtig, daß ich den Holzklötzchen auch nicht ansehen kann, ob sie Bauer, Läufer, Turm, etc. sind. Ich kann nicht sagen: Das ist ein Bauer *und* für diese Figur gelten die und die Spielregeln. Sondern die Spielregeln *bestimmen* erst diese Figur: Der Bauer ist die Summe der Regeln, nach welchen er bewegt wird (auch das Feld ist eine Figur), so wie in der Sprache die Regeln der Syntax das Logische im Wort bestimmen.

WAISMANN MACHT NUN FOLGENDEN EINWAND: Gut, das leuchtet mir alles ein. Bisher hatten wir es aber nur mit dem Fall zu tun, daß die Theorie sagt, die und die Konfiguration sei möglich. Wie steht es aber, wenn die Theorie beweist, daß eine bestimmte Konfiguration - z.B. die vier Türme in einer Geraden nebeneinander - *nicht* eintreten kann? Und gerade dieser Fall liegt bei Hilbert vor. In diesem Fall kann doch die Theorie das Spiel nicht nachbilden. Den Schritten des Kalküls entsprechen nicht mehr die Züge des Spiels.

WITTGENSTEIN: Gewiß nicht. Aber auch in dem Fall muß es sich herausstellen, daß die

deveríamos usar as proposições desta teoria para obter informações substantivas sobre as possibilidades deste jogo. Essa teoria é a metamatemática de Hilbert.

WITTGENSTEIN: O que se chama de “teoria do jogo de xadrez” não é uma teoria que descreve algo, mas é uma espécie de geometria. Decerto é novamente um cálculo e não uma teoria.

Para deixar isto claro, pergunto: existe, na sua opinião, alguma diferença entre as duas seguintes proposições: “Posso chegar ali em oito lances”, e: “Demonstrei por meio da teoria que posso chegar ali em oito lances”? Não! Porque se na teoria emprego um simbolismo em vez do tabuleiro de xadrez com suas peças, a prova de que posso chegar lá em oito lances é que no simbolismo eu realmente chego lá, que agora, portanto, faço com sinais o que faço com as peças no tabuleiro de xadrez. Se executo os lances e se demonstro sua possibilidade - eu fiz a mesma coisa novamente na demonstração. Acabei de executar os lances simbolicamente. O que falta realmente é apenas o movimento real; e todos estamos em uníssono no fato de que o deslocamento das peças de madeira sobre o tabuleiro é algo inessencial.

Faço na demonstração a mesma coisa que faço no jogo, assim como quando digo: o Sr., Sr. Waismann, está fazendo um cálculo, mas vou predizer quais cifras o Sr. vai obter: então eu simplesmente faço o cálculo novamente, só que eventualmete com outros sinais (ou com os mesmos sinais que acabei de conceber de forma diferente). Agora posso *recalcular* o resultado de um cálculo; não posso chegar ao mesmo resultado de uma maneira totalmente diferente. Não é como se o Sr. fosse o calculista e eu reconhecesse o resultado do seu cálculo por meio de uma teoria. E é exatamente o mesmo que acontece com a “*teoria do jogo de xadrez*”.

Então, se estabeleço que na “teoria” existem tais e tais possibilidades, estou me movimentando novamente no jogo, não em um metajogo. Cada passo do cálculo corresponde a um movimento no jogo, e toda a diferença consiste apenas no movimento mecânico das peças de madeira.

A propósito, é muito importante também que eu não possa ver as peças de madeira como se se elas fossem um peão, um bispo, uma torre, etc. Não posso dizer: este é um peão *e* tais e tais regras do jogo se aplicam a esta peça. Mas, antes, que as regras do jogo *determinam* esta peça: o peão é a soma das regras segundo as quais ele se movimenta (o tabuleiro também é uma peça), assim como na linguagem as regras da sintaxe determinam o lógico na palavra.

WAISMANN AGORA FAZ A SEGUINTE OBJEÇÃO: bem, isto elucida tudo para mim. Até agora, no entanto, tivemos apenas que lidar com o caso em que a teoria diz que esta e esta configuração é possível. Mas e quando a teoria demonstra que uma determinada configuração - por exemplo, quatro torres próximas uma da outra em linha reta - *não* pode ocorrer? E este é precisamente o caso de Hilbert. Neste caso, a teoria não pode reproduzir o jogo. Os passos do cálculo não mais correspondem aos lances do jogo.

WITTGENSTEIN: Certamente que não. Mas mesmo neste caso ela tem que evidenciar que a teoria é um cálculo, só que diferente do jogo. Temos um *novo* cálculo diante de nós, um cálculo com multiplicidade diferente.

Em primeiro lugar: *quando demonstro que não posso fazer isto e aquilo, não demonstro uma proposição mas provejo uma indução.*

Também posso ver a indução *no tabuleiro de xadrez*. Eu produzo esta configuração no jogo. Antes disto, eu poderia ter tentado e finalmente desistido. Agora não tento mais. Ocorre exatamente o mesmo que quando demonstro por indução que há infinitos números primos ou que $\sqrt{2}$ é irracional. O efeito dessas demonstrações na aritmética real é simplesmente que as pessoas

Theorie ein Kalkül ist, nur ein anderer als das Spiel. Wir haben hier einen *neuen* Kalkül vor uns, einen Kalkül von anderer Multiplizität.

Zunächst einmal: *Wenn ich beweise, daß ich das und das nicht tun kann, so beweise ich damit nicht einen Satz, sondern ich gebe eine Induktion.*

Auch die Induktion kann ich *auf dem Schachbrett sehen*. Ich diese Konfiguration im Spiele herzustellen. Vorher hätte ich es vielleicht probiert und es schließlich aufgegeben. Jetzt probiere ich es nicht mehr. Es verhält sich damit genau so, wie wenn ich durch eine Induktion beweise, daß es unendlich viele Primzahlen gibt oder daß √2 irrational ist. Die Wirkung dieser Beweise auf das tatsächliche Rechnen besteht einfach darin, daß nun die Menschen nicht mehr nach einer »größten Primzahl« suchen, resp. nach einem Bruch, der √2 ist. Aber hier muß man noch genauer sein. *Konnte* man denn vorher überhaupt suchen? Das, was man gemacht hat, hatte zwar eine äußerliche Ahnlichkeit mit dem Suchen, war aber von einer gänzlich anderen Art: Man hat etwas gemacht, in der Erwartung, daß dadurch etwas anderes eintreten werde. Aber das war kein Suchen, so wenig, wie ich danach suchen kann, mit den Ohren zu wackeln. Was ich einzig und allein tun kann, ist, daß ich meine Augenbrauen, meine Stirn und diese Partien bewege, in der Hoffnung, daß sich die Ohren auch bewegen werden. Aber ob sie das tun, kann ich nicht wissen; ich kann also auch nicht danach *suchen*.

In *dem* System, in dem ich erkenne, daß eine Zahl Primzahl ist, kann ich nicht einmal nach der Zahl der Primzahlen fragen. Die Frage entsteht nur, indem man die Substantivform darauf anwendet. Und hat man die Induktion entdeckt, so ist dies wieder etwas anderes als die Berechnung einer Zahl.

Den Induktionen entsprechen die Formeln der Algebra (Buchstabenrechnung) und zwar darum, weil die internen Beziehungen zwischen den Induktionen dieselben sind wie die internen Beziehungen zwischen den Formeln.

Das System der Buchstabenrechnung ist ein neuer Kalkül; aber er verhält sich zum gewöhnlichen Zahlenrechnen nicht so wie ein Metakalkül zu einem Kalkül. *Die Buchstabenrechnung ist keine Theorie*. Das ist das Wesentliche. Die » Theorie« des Schachspiels gleicht - sofern sie die Unmöglichkeit gewisser Stellungen untersucht - der Algebra in ihrem Verhältnis zum Zahlenrechnen. Ebenso muß sich Hilberts »Metamathematik« als verkappte Mathematik entpuppen.

Hilberts Beweis[30]

(»Neubegründung der Mathematik« 1922)

»Soll der Formalismus Ersatz bieten für die frühere wirkliche, aus Schlüssen und Behauptungen bestehende Theorie, so muß auch der inhaltliche Widerspruch sein formales Aquivalent finden.« »a = b« und »a ≠ b« sollen niemals zugleich beweisbare Formeln sein.

Der Nachweis der Widerspruchsfreiheit in dem einfachen Modell von Hilbert verläuft in der Tat induktiv: Der Beweis zeigt uns, durch eine Induktion, die Möglichkeit, daß immer weiter → Zeichen auftreten müssen.

Der Beweis läßt uns etwas sehen. Das, was er zeigt, kann man aber nicht durch einen Satz ausdrücken. Man kann also auch nicht sagen: »Die Axiome sind widerspruchsfrei.« (Ebensowe-

30. Siehe oben, S. 119 Anm. Die Zitation, die folgt, kommt vor auf S. 135 und der Beweis der Widerspruchsfreiheit auf S. 172-3 des dort zitierten Werks. (F. H.)

não procuram mais pelo “maior número primo” ou por uma fração que corresponda à √2. Mas aqui temos que ser mais precisos. *Pode-se*, afinal, fazer uma procura antes disso? O que se fez tinha uma semelhança externa com a procura, mas era de um tipo totalmente diferente: fez-se alguma coisa na expectativa de que algo mais ocorreria como resultado. Mas isto não foi uma procura, não mais do que posso procurar mexendo as minhas orelhas. A única coisa que posso fazer é mover minhas sobrancelhas, minha testa e essas partes na esperança de que as orelhas se movam também. Mas não posso saber se elas farão isto; então também não posso *procurar* por isto.

Dentro do sistema em que reconheço que um número é primo, não posso sequer perguntar sobre o número de números primos. A questão só surge quando se aplica a forma substantiva a ela. E uma vez que a indução foi descoberta, isto é novamente algo diferente do cálculo de um número.

As fórmulas da álgebra (cálculo de letras) correspondem às induções porque as relações internas entre as induções são iguais às relações internas entre as fórmulas.

O sistema de calcular letras é um novo cálculo; mas não se relaciona com a aritmética numérica comum da mesma forma que um metacálculo se relaciona com um cálculo. *O cálculo com letras não é uma teoria*. Esta é a essência. A “teoria” do jogo de xadrez - na medida em que examina a impossibilidade de certas posições - assemelha-se à álgebra em sua relação com a aritmética numérica. Da mesma forma, a “metamatemática” de Hilbert tem que acabar se tornando uma matemática disfarçada.

A Prova de Hilbert[30]

(“Nova Fundamentação da Matemática”, 1922)

“Se o formalismo deve oferecer um substituto para a teoria real anterior que consiste em conclusões e afirmações, então a contradição em termos de conteúdo também deve encontrar seu equivalente formal.” »a = b« e »a ≠ b« jamais devem ser fórmulas demonstráveis ao mesmo tempo.

A demonstração de consistência no modelo simples de Hilbert é de fato indutiva: a prova nos mostra, por meio de uma indução, a possibilidade de que os sinais → têm que ocorrer o tempo todo.

A prova nos permite ver algo. Mas o que ela mostra não pode ser expresso em uma proposi-

30. Ver acima a nota de rodapé da p. 136. A citação que se segue ocorre na p. 170, e a prova de consistência nas pp. 172-173 da obra ali citada. (N. E.)

nig, wie man sagen kann: Es gibt unendlich viel Primzahlen. Das ist Prosa.)

Ich glaube, einen Beweis für die Widerspruchsfreiheit führen, kann nur eines heißen: die Regeln durchschauen. Etwas anderes kann ich gar nicht tun. Stellen Sie sich vor, ich gebe jemandem ein langes Verzeichnis von Aufträgen, die er in der Stadt besorgen soll. Das Verzeichnis ist so lang, daß ich vielleicht den einen Auftrag vergesse und einen anderen gegeben habe, oder ich habe die Aufträge verschiedener Leute zusammengestellt. Was kann ich tun, um mich zu überzeugen, daß die Aufträge ausführbar sind? Ich muß die Liste durchgehen. Aber »beweisen« kann ich nichts. (Wir dürfen nicht vergessen, daß wir es hier nur mit Spiel*regeln* zu tun haben und nicht mit den Konfigurationen: Bei der Geometrie wäre es recht wohl denkbar, daß ich durch Durchgehen der Axiome den Widerspruch nicht bemerke.) Wenn ich sage: Ich will nachsehen, ob das logische Produkt eine Kontradiktion ist, so kommt es auf dasselbe hinaus. Das Anschreiben in Form der Kontradiktion *erleichtert* nur die Sache. Wenn man das einen »Beweis« nennen will, so mag man das tun: er ist dann eben nur eine Methode, die Kontrolle zu erleichtern. Man muß aber sagen: An und für sich kann mich auch ein solcher »Beweis« nicht davor bewahren, etwas übersehen zu haben.

Was die Kontrolle leistet, kann keine Rechnung leisten.

Wie ist es aber, wenn ich die Spielregeln »systematisch« durchsuche? Sobald ich mich in einem System bewege, habe ich wieder einen Kalkül; damit aber entsteht die Frage der Widerspruchsfreiheit von neuem. Ich kann also tatsächlich nichts anderes tun als: eine Regel nach der anderen durchmustern.

Was würde es heißen, wenn bei einem Kalkül »0 ≠ 0« herauskäme? Es ist klar: Wir hätten es dann nicht etwa mit einer modifizierten Arithmetik zu tun, sondern mit einer total anderen Arithmetik, die überhaupt mit der »kardinalen Arithmetik« nicht die geringste Ähnlichkeit besitzt. Man könnte da nicht sagen: In dem und dem Zug stimmt sie noch mit unserer Arithmetik überein (so wie die nicht-euklidische Geometrie mit der euklidischen Geometrie - hier ist die Änderung eines Axioms keine so tiefgehende Angelegenheit), sondern es gäbe dann überhaupt nicht die geringste Spur von Ähnlichkeit mehr. Ob ich einen solchen Kalkül anwenden kann, ist eine andere Frage.

Hier bestehen übrigens verschiedene Schwierigkeiten. Zunächst ist mir etwas unklar: »a = b« drückt doch nur die Ersetzbarkeit von b durch a aus. Die Gleichung ist also eine Zeichenregel, eine Regel des Spiels.[31] Wie kann sie dann Axiom, d. h., Konfiguration des Spiels werden? Von diesem Standpunkt ist eine Formel wie »0 ≠ 0« überhaupt nicht verständlich. Denn sie würde ja bedeuten: 0 ist durch 0 nicht ersetzbar - soll ich also nachsehen, ob vielleicht die eine 0 ein Schwanzel hat, die die andere nicht hat? Was heißt denn ein solches Verbot? Es ist derselbe

31. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, II, § 107: »Wenn man also die formale Arithmetik als Spiel betrachtet, so ist die Formel »a + a' = a ' + a« als Ausdruck einer Regel dieses Spiels eine der Grundlagen von dessen Theorie, auf der in dieser Schlüsse aufgebaut werden können; aber sie ist nicht etwas, mit dem im Spiele Veränderungen vorgenommen werden, kein Gegenstand des Spiels, nicht einer Stellung von Schachfiguren zu vergleichen, sondern dem Wortausdrucke einer Regel des Schachspiels.« (A. W.)

ção. Portanto, não se pode tampouco dizer: "Os axiomas são consistentes." (Tão pouco quanto se pode dizer: há infinitos números primos. Isto é só prosa.)

Acredito que fornecer uma prova de consistência só pode significar uma coisa: ver através das regras. Não posso fazer mais nada. Imagine dar a alguém uma longa lista de tarefas para fazer na cidade. A lista é tão longa que posso ter esquecido uma tarefa e ter feito outra, ou ter colocado junto as tarefas de outras pessoas. O que posso fazer para me convencer de que as tarefas são viáveis? Eu tenho que revisar a lista. Mas não posso "demonstrar" nada. (Não devemos nos esquecer que estamos lidando aqui apenas com *regras* de jogo e não com as configurações: no caso da geometria seria bem possível que eu não percebesse a contradição passando pelos axiomas.) Quando digo: quero ver se o produto lógico é uma contradição, dá no mesmo. A anotação em forma de contradição apenas *facilita* as coisas. Se alguém quiser chamar isto de "prova", pode-se fazê-lo: é apenas um método para facilitar o controle. Mas é necessário dizer: por si só, mesmo esta "prova" não pode me salvar de ter negligenciado alguma coisa.

O que faz o controle não pode ser realizado pelo cálculo.

Mas como é quando vasculho as regras do jogo "sistematicamente"? Assim que me movo em um sistema, tenho um cálculo novamente; mas com isto a questão da consistência surge novamente. Então, eu realmente não posso fazer nada além de: escrutinar uma regra após a outra.

O que significaria se "0 ≠ 0" resultasse de um cálculo? É claro: não teríamos então que lidar com uma aritmética modificada, mas com uma aritmética totalmente diferente, que não possuiria a menor semelhança com a "aritmética cardinal". Não se poderia dizer: neste e naquele movimento ela ainda concorda com a nossa aritmética (como a geometria não euclidiana com a geometria euclidiana - aqui a mudança de um axioma não é uma questão tão profunda), mas então não haveria o menor traço de similaridade. Se posso aplicar tal cálculo é uma outra questão.

Aliás, existem várias dificuldades aqui. A princípio, algo não está claro para mim: "a = b" apenas expressa a substitutibilidade de b por a. Portanto, a equação é uma regra de sinais, uma regra do jogo.[31] Como então ela pode se tornar um axioma, isto é, a configuração do jogo? Deste ponto de vista uma fórmula como "0 ≠ 0" não é de todo compreensível. Porque isto significaria: 0 não é substituível por 0 - devo ver se talvez aquele 0 tem uma cauda que o outro não tem? O que esta proibição significa? É a mesma cantilena de quando digo: "a = a". Isto também é um disparate sempre que se o escreve. Na escola o professor está perfeitamente certo ao ensinar aos alunos que 2 + 2 = 4, mas não que 2 = 2. A maneira como as crianças aprendem a fazer aritmética

31. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, II, § 107: "Se alguém considera a aritmética formal como um jogo, então a fórmula "a + a' = a' + a" como uma expressão de uma regra deste jogo é um dos fundamentos de sua teoria, sobre a qual estas conclusões podem ser construídas; mas não é algo com o qual mudanças são feitas no jogo, não é um objeto do jogo, não deve ser comparado a uma posição de peças do xadrez, mas à expressão verbal de uma regra do jogo de xadrez." (N. W.)

Stiefel, wie wenn ich sage: »a = a«. Das ist auch Blödsinn, so oft man es anschreibt. Der Lehrer in der Schule hat vollkommen recht, wenn er seinen Kindern beibringt, daß 2 + 2 = 4 ist, aber nicht, daß 2 = 2 ist. Die Art, wie die Kinder auf der Schule rechnen lernen, ist schon vollkommen in Ordnung, und man braucht sie sich gar nicht strenger zu wünschen. Daß »a = a« gar nichts heißt, sieht man ja auch daraus, daß diese Formel nie benützt wird.

WITTGENSTEIN: Was meinen Sie, wenn ich bei einem Kalkül auf die Formel »0 ≠ 0« komme, wäre der Kalkül deswegen nicht interessant?

SCHLICK: Nein, der Mathematiker würde sagen, so etwas interessiert ihn nicht.

WITTGENSTEIN: Aber entschuldigen Sie! Es wäre ungeheuer interessant, daß gerade das herauskommt! Im Kalkül interessiert man sich ja immer dafür, was herauskommt! Wie seltsam! Das kommt da heraus - und dort das! Wer hätte das gedacht! Wie interessant erst, wenn ein Widerspruch herauskäme! Ja, ich sage schon jetzt voraus: Es werden mathematische Untersuchungen über Kalküle kommen, die einen Widerspruch enthalten, und man wird sich noch etwas darauf zugute tun, daß man sich auch von der Widerspruchsfreiheit emanzipiert.

[Man könnte z. B. einen solchen Kalkül als Modell benützen, auf den man andere abbildet und dadurch einsieht, daß auch diese einen Widerspruch enthalten.]

Wie wäre es denn, wenn ich einen solchen Kalkül anwenden will? Hätte ich bei der Anwendung kein gutes Gewissen, solange ich nicht die Widerspruchsfreiheit bewiesen habe? Aber kann ich denn so fragen? Kann ich den Kalkül anwenden, so habe ich ihn eben angewendet; es gibt kein nachträgliches Korrigieren. Was ich kann, das kann ich. Ich kann die Anwendung nicht dadurch ungeschehen machen, daß ich sage: eigentlich war das keine Anwendung. (?)

Muß ich mit der Anwendung des Kalküls erst auf den Beweis der Widerspruchsfreiheit warten? Ist alles, was man bisher gerechnet hat, eigentlich - *sub specie aeterni* - auf gut Kredit geschehen? Und ist es denkbar, daß sich eines Tages alles das als unerlaubt erweist? Weiß ich denn nicht, was ich tue? Es kommt tatsächlich darauf hinaus, daß man beweisen will, daß gewisse Sätze kein Unsinn sind.

Die Frage ist also die: Ich habe eine Reihe von Sätzen, z. B. »p, q, r, . . .« und eine Reihe von Operations-Vorschriften, z.B. ». , ⋁, ~« und man fragt: Kann man durch Anwendung dieser Operations-Vorschriften auf die gegebenen Sätze jemals zu einem Unsinn kommen? Die Frage wäre dann berechtigt, wenn ich unter »Unsinn« die Kontradiktion und die Tautologie verstehe. Ich müßte dann die Regeln für die Bildung von Aussagen so fassen, daß diese Formen nicht erscheinen.

Wie wäre es denn eigentlich, we~~nn ein Physiker mit ein~~em Kalkül arbeitet und dann nachträglich die Mathematiker herausbringen, daß dieser Kalkül widerspruchsvoll ist?

SCHLICK: Das wäre ganz harmlos.

WITTGENSTEIN: Es kommt nur auf die Interpretation an. Auch ein widerspruchsvoller Kalkül könnte angewendet werden, nur müßte er uminterpretiert werden. Was hätte Aristoteles gesagt, wenn man ihm etwas von einer dreiwertigen Logik erzählt hätte? Er hätte gesagt: Unsinn! Eine Aussage kann nur wahr oder falsch sein, nichts Drittes. Nun kommt aber Tarski und sagt: Warum? Eine dreiwertige Logik ist ebensogut möglich. Ganz in Ordnung! Wir müssen nur

na escola é perfeitamente normal, e não é preciso aspirar a que seja mais rigorosa. Que “a = a” nada significa pode ser visto pelo fato de que esta fórmula nunca é utilizada.

WITTGENSTEIN: você acha que se eu chegasse à fórmula “0 ≠ 0” em um cálculo, o cálculo não seria interessante por causa disto?

SCHLICK: Não. O matemático diria que não está interessado em algo assim.

WITTGENSTEIN: Mas, desculpe-me! Seria extremamente interessante que justamente isto viesse à tona! No cálculo nos interessamos sempre pelo que vem à tona! Que estranho! Isto vem daí - e ali está! Quem teria pensado nisto! Que interessante se particularmente uma contradição viesse à tona! Sim, já estou prevendo: haverá investigações matemáticas em cálculos que contêm uma contradição, e ainda nos beneficiaremos do fato de que também nos emancipamos da consistência.

[Pode-se, por exemplo, utilizar cálculo assim como um modelo no qual alguém mapeia outros e, portanto, vê que eles também contêm uma contradição.]

Como seria se eu quisesse aplicar este cálculo? Eu não ficaria com a consciência limpa ao usá-lo enquanto não demonstrasse a sua consistência? Mas posso formular uma pergunta assim? Se posso aplicar o cálculo, então acabo de aplicá-lo; não há correções subsequentes. O que posso fazer, eu posso. Não posso desfazer a aplicação dizendo: na verdade, não era um a aplicação. (?)

Tenho que esperar pela demonstração de consistência antes de aplicar o cálculo? Tudo o que foi calculado até agora - *sub specie aeterni* - ocorreu de boa fé? E é concebível que um dia tudo isto acabe se comprovando como ilegítimo? Então eu não sei o que estou fazendo? Na verdade, tudo se resume a tentar demonstrar que certas proposições não são contrassensos.

Portanto, a questão é esta: tenho uma série de proposições, por exemplo “p, q, r , . . .”, e uma série de instruções operacionais, por exemplo “. , ⋁, ~”, e pergunta-se: alguém pode chegar algum dia a um contrassenso aplicando estas instruções operacionais às proposições dadas? A questão seria justificada se por “contrassenso” eu compreendesse a contradição e a tautologia. Eu teria então que tomar as regras para a formação dos enunciados de maneira que estas formas não aparecessem.

Como seria realmente se um físico trabalhasse com um cálculo e, em seguida, os matemáticos descobrissem que este cálculo é inconsistente?

SCHLICK: Isto não causaria nenhum dano.

WITTGENSTEIN: Só depende da interpretação. Um cálculo contraditório também poderia ser empregado, só que teria que ser reinterpretado. O que Aristóteles teria dito se tivesse ouvido falar de uma lógica trivalente? Ele teria dito: absurdo! Um enunciado só pode ser verdadeiro ou falso, nunca um terceiro. Mas agora vem o Tarski, e diz: por quê? Uma lógica trivalente é igualmente possível. Muito bem! Basta então chamar a tautologia de “verdadeira”, a contradição de “falsa” e o terceiro valor de “possível”.[32][33]

32. A ideia de um sistema polivalente introduzida por Lukasiewicz e Tarski em 1930 veio inteiramente de Lukasiewicz. Ver A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*. Oxford, 1956, pp. 25 ss., onde o artigo original foi reimpresso. O fato de que esta ideia tenha sido atribuída a Tarski neste ponto pode ser rastreada até o fato de que ele a interpretou um pouco antes (em 2 de fevereiro de 1930) em um colóquio em Viena. Ver *Monatshefle für Math. u. Phys.*, 38, 1931, pp. 24-5. (N. E.)

33. Observemos que estas reflexões valem não somente para lógicas trivalentes ou multivalentes, mas sobretudo para

die Tautologie »wahr«, die Kontradiktion »falsch« und den dritten Wert »möglich« nennen.[32][33]

Denken wir an die drei Gesetze Newtons. Ob diese Gleichungen etwas ausdrücken, ob sie Sinn haben, kann doch nicht davon abhängen, welche Eigenschaften der Kalkül hat.

Was ich sagen will, ist immer dasselbe: Der Nachweis der Widerspruchsfreiheit kann keine *Lebensfrage der Mathematik* sein.

Ich glaube, das hängt wesentlich damit zusammen, daß ich nicht fragen darf: Kann ich *jemals* zu einem Widerspruch kommen? Ich kann nur fragen, wo ich ein Verfahren habe, zu suchen. Ich kann nicht ins Unendliche hinein suchen.[34]

Wenn ein widerspruchsvoller Kalkül angewendet wird, wäre das gerade so, wie wenn sich der Physiker verrechnet hätte: Deswegen ist die Arithmetik doch anwendbar. Und der Beweis kann uns nicht vor dem Verrechnen schützen.

WAISMANN FRAGT WITTGENSTEIN: Wie wäre es, wenn ein Physiker vor hundert Jahren eine Theorie aufgestellt hätte wie die allgemeine Relativitätstheorie, d. h. ein System von mechanischen und geometrischen Axiomen? Hätte man damals, wo man die Sache noch nicht durchschaute, nicht mit Recht gefragt: Ja, ist denn eine solche Theorie überhaupt widerspruchsfrei denkbar?

Ferner: Das Problem der Widerspruchsfreiheit wird erst aktuell in der Analysis, d. h., in der Lehre von den reellen Zahlen. Hier tauchen nämlich imprädikative Begriffsbildungen auf (obere Grenze einer beschränkten Menge) von derselben Art wie diejenigen, welche die Antinomien verschulden, und hier argwöhnt man daher die Möglichkeit von Widerspruch. Ebenso in der Mengenlehre (Auswahlaxiom und Axiom des Unendlichen), wo man nicht übersieht, ob man nicht zu einem Widerspruch kommen wird.

WITTGENSTEIN: Ja, das hängt damit zusammen, daß man die Analysis und die Mengenlehre immer als eine Theorie auffaßt, die etwas beschreibt, und nicht als einen Kalkül.

Donnerstag, 1. Januar 1931 (bei Schlick)[35]

Amerika.[36] *Das College-Wesen*

32. Die von Lukasiewicz und Tarski in 1930 eingeführte Idee eines mehrwetigen Systems stammte vollständig von Lukasiewicz. Siehe A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford, 1956, S. 25 ff., wo der Originalartikel neugedruckt ist. Daß diese Idee an dieser Stelle Tarski zugeschrieben wurde, ist darauf zurückzuführen, daß er sie kurz vorher (am 2 1. Februar 1930) in einem Kolloquium in Wien ausgelegt hatte, s. *Monatshefle für Math. u. Phys*., 38, 1931, S. 24-5. (F. H.)
33. Beachten Sie, dass diese Überlegungen nicht nur für trivalente oder multivalente Logiken gelten, vor allem aber für parakonsistente Logiken, die dem Herausgeber dieses Textes, Brian McGuinness, zu diesem Zeitpunkt wahrscheinlich unbekannt sind. (A. U.)
34. Siehe oben, S. 5 f. (F. H.)
35. Man kann sich nur vornehmen, anständig zu sein, alles übrige kann man sich nicht vornehmen. (A. W.)
36. Vielleicht wurde diese Bemerkung durch Schlicks Absicht, später im Jahr Amerika zu besuchen, veranlaßt. (F. H.)

Vamos pensar nas três leis de Newton. Se estas equações expressam alguma coisa, se fazem sentido, isto não pode depender das propriedades do cálculo.

O que quero dizer é sempre o mesmo: a prova de consistência não pode ser uma *questão vital da matemática*.

Acredito que isto tenha a ver essencialmente com o fato de que não posso perguntar: será que *algum dia* chegarei a uma contradição? Só posso perguntar onde tiver um procedimento para procurar. Não posso procurar por algo no infinito.[34]

Se um cálculo inconsistente fosse aplicado, seria como se o físico tivesse calculado mal: por isto é que a aritmética ainda seria aplicável. Uma demonstração não pode nos salvaguardar de erros de cálculo.

WAISMANN PERGUNTA A WITTGENSTEIN: Como seria se um físico cem anos atrás tivesse proposto uma teoria como a relatividade geral, isto é, um sistema de axiomas físicos e geométricos? Naquela época, quando a questão ainda não havia sido entrevista, não se perguntaria corretamente: mas uma teoria assim pode ser concebida de maneira consistente?

Além disso: o problema de consistência só se torna vigente na análise, isto é, na teoria dos números reais. Pois é aqui que surgem formações de conceitos impredicativos (limite superior de um conjunto restrito) do mesmo tipo daqueles que são responsáveis pelas antinomias, e aqui, portanto, suspeita-se da possibilidade de contradição. Da mesma forma na teoria dos conjuntos (axioma da escolha e axioma do infinito), onde não se visualiza se não se chegará a uma contradição.

WITTGENSTEIN: Sim, isto tem a ver com o fato de que a análise e a teoria dos conjuntos são sempre concebidos como uma teoria que descreve algo, e não como um cálculo.

Quinta-feira, 1 ° de Janeiro de 1931 (na casa de Schlick)[35]

América.[36] *A Índole das Faculdades*

WITTGENSTEIN: O que se deve dar aos americanos? A nossa cultura meio podre? Os americanos ainda não têm uma cultura. Mas eles não têm nada a aprender conosco.

"What I Believe", de Russell.[37] Certamente não é "inofensivo".

a lógica paraconsistente, provavelmente desconhecida nesta época pelo editor deste texto. Brian McGuinness. (N. T.)
34. Ver acima, p. 6s. (N. E.)
35. Uma pessoa só pode se propor a ser honesta, todo o resto uma pessoa não pode se propor (N. W.)
36. Esta observação talvez tenha sido motivada pela intenção de Schlick de visitar a América mais tarde naquele ano. (N. E.)
37. *Forum*, 82, 1929, pp. 1 29-1 34, reimpresso em *Living Philosophies*, New York, 1931, pp. 9-19 (*não* idêntico ao artigo

WITTGENSTEIN: Was soll man denn den Amerikanern geben? Etwa unsere halbverfaulte Kultur? Die Amerikaner haben noch keine Kultur. Aber von uns haben sie nichts zu lernen.

Russells »What I believe«.[37] Durchaus nicht »harmlos«.

Rußland. Die Leidenschaft verspricht etwas. Unser Gerede dagegen ist kraftlos.

⟨WIDERSPRUCHSFREIHEIT V⟩

Ist es *berechtigt*, nach der Widerspruchsfreiheit zu fragen? Die merkwürdige Situation ist hier die, daß man etwas sucht und gar nicht weiß, was das eigentlich ist, wonach man sucht. Wie kann ich z. B. fragen, ob die euklidische Geometrie widerspruchsfrei ist, wenn ich mir überhaupt nichts darunter denken kann, daß sie einen Widerspruch enthält? Wie wäre es denn, wenn es in ihr einen Widerspruch gäbe? Diese Frage muß doch zuerst beantwortet sein, ehe man solche Fragen untersucht.

[Das Ziel, das man sucht, steht also gar nicht fest.]

Eines ist klar: Einen Widerspruch kann ich nur verstehen, wenn er eine Kontradiktion ist. Ich setze also den Fall, ich habe eine Reihe von Sätzen, sagen wir p, q, r, ... und ich bilde ihr logisches Produkt. Ich kann nun nachsehen, ob dieses logische Produkt eine Kontradiktion ist. Ist nun *das* die Frage nach der Widerspruchsfreiheit? Das wäre in fünf Minuten zu entscheiden. In diesem Sinn kann wohl kein Mensch zweifeln, daß die euklidischen Axiome widerspruchsfrei sind.

Was kann aber die Frage noch heißen? Vielleicht: Irgendeinmal wird sich bei fortgesetztem Schließen ein Widerspruch einstellen? Darauf ist zu sagen: Haben wir eine Methode, den Widerspruch aufzufinden? Wenn nicht, dann besteht hier gar keine Frage. Denn ins Unendliche hinein suchen kann man nicht.[38]

WAISMANN: Man kann sich vielleicht doch etwas denken, nämlich das Schema des indirekten Beweises. Auf Grund einer Analogie überträgt man das auf ein Axiomen-System. Wir müssen zweierlei unterscheiden: das innerhalb der Mathematik formulierbare Problem, das eben damit auch schon eine Methode der Lösung besitzt, und die dem Aufbau der Mathematik vorangehende, führende Idee. Solche führende Ideen haben ja die Mathematiker auch, z.B. beim Fermatschen Problem. Ich möchte nun meinen, daß die Frage der Widerspruchsfreiheit diesem Kreis von vormathematischen Fragestellungen angehört.

WITTGENSTEIN: Was heißt Analogie? Z. B. Analogie mit dem indirekten Beweis? Es ist hier so wie mit der Dreiteilung des Winkels. Nach der Dreiteilung des Winkels kann ich nicht suchen. Was geht eigentlich vor, wenn sich der Mathematiker mit dieser Frage beschäftigt? Das kann zweierlei sein. 1. Er stellt sich den Winkel in drei Teile geteilt vor:

37. *Forum*, 82, 1929, S. 1 29- 1 34, neugedruckt in *Living Philosophies*, New York, 1931 , S. 9-19 (*nicht* identisch mit dem unter demselben Titel erschienenen Artikel in *Nation*, 132, 1931 u. 150, 1940). Russell behauptet, daß kein Gehorsam gegen moralische Regeln die Liebe ersetzen könne, und daß, wo die Liebe echt ist, sie vereinigt mit Intelligenz, genügen werde, alle notwendigen moralischen Regeln hervorrnbringen. (F. H.)

38. Siehe oben, S. 34 f. (F. H.)

Rússia. A paixão promete algo. Nosso falatório, por outro lado, é impotente.

⟨CONSISTÊNCIA V⟩

Justifica-se a nossa pergunta sobre a consistência? A situação estranha aqui é que se procura por alguma coisa e, na realidade, nem sequer se sabe o que se está procurando. Como posso, por exemplo, perguntar se a geometria euclidiana é consistente se não consigo imaginar absolutamente nada que nela contenha uma contradição. Como seria se nela houvesse uma contradição? Esta pergunta tem que ser respondida em primeiro lugar, antes de investigar tais questões.

[Portanto, o objetivo que se busca não está fixado de forma alguma.]

Uma coisa é certa: só posso compreender uma contradição se ela for uma contradição lógica. Presumo, portanto que tenho uma série de proposições, digamos p, q, r ,. . . ., e formo o seu produto lógico. Agora posso checar se este produto lógico é uma contradição. Seria *esta* a questão da consistência? Isto seria decidido em cinco minutos. Neste sentido, ninguém pode duvidar de que os axiomas euclidianos sejam consistentes.

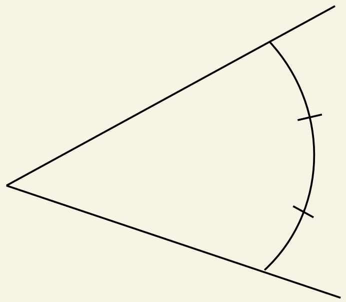
Mas o que mais a pergunta pode significar? Talvez: em algum momento, se você continuar a inferência, surgirá uma contradição? A resposta é: temos um método para encontrar a contradição? Se não, então não há dúvida aqui. Porque você não pode procurar no infinito.[38]

WAISMANN: Talvez se possa pensar em algo, a saber, no esquema da demonstração indireta. Com base em uma analogia, transfere-se isto para o sistema de axiomas. Temos que distinguir entre duas coisas: o problema que pode ser formulado dentro da matemática, que, portanto já possui um método de resolução, e a ideia principal que precede a estrutura da matemática. Os matemáticos também têm tais ideias principais, por exemplo, no problema de Fermat. Eu pensaria que a questão da consistência pertence a este grupo de questões pré-matemáticas.

WITTGENSTEIN: O que significa analogia? Por exemplo, analogia com demonstração indireta? Seria como acontece com a trissecção do ângulo. Não posso procurar pela trissecção do ângulo. O que realmente acontece quando o matemático se ocupa com esta questão? Pode acontecer duas coisas. 1. Ele imagina o ângulo dividido em três partes:

publicado sob o mesmo título em *Nation*, 132, 1931 e 150, 1940) Russell afirma que nenhuma obediência às regras morais pode substituir o amor e que, onde o amor é genuíno, combinado com a inteligência, será suficiente para produzir todas as regras morais necessárias. (N. E.)

38. Ver acima, pp. 34s. (N. E.)



2. Er denkt an die Konstruktion der Zwei-, Vier-, ... -teilung. Und hier entsteht nun der Irrtum: Man meint, da man von der Zwei- und Vierteilung sprechen kann, kann man auch von der Dreiteilung sprechen, geradeso, wie man zwei, drei und vier Kpfel zählen kann. Aber die Dreiteilung - wenn es sie gäbe - gehört ja einer ganz anderen Kategorie, einem ganz anderen System an als die Zwei- und Vierteilung. In dem System, in dem ich von Zwei- und Vierteilung sprechen kann, kann ich nicht von Dreiteilung sprechen. Das sind *logisch* ganz verschiedene Gebilde!

Ich kann die Zwei-, Drei- und Vierteilung nicht unter einen Hut bringen, weil sie ganz verschiedene Formen sind. Formen kann man nicht zählen wie wirkliche Dinge. Man kann sie nicht unter einen Begriff bringen.

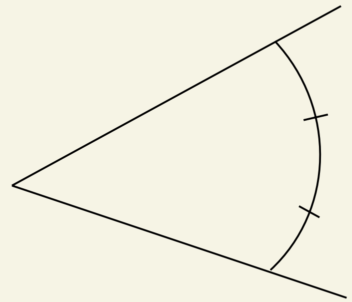
Es ist so wie mit dem Wackeln mit dem Ohr. Der Mathematiker läßt sich natürlich durch Assoziationen, durch gewisse Analogien mit dem bisherigen System leiten. Ich behaupte ja nicht: Wenn jemand sich mit dem Fermatschen Problem beschäftigt, so ist das falsch oder unberechtigt. Durchaus nicht! Wenn ich z. B. eine Methode habe, um nach ganzen Zahlen zu suchen, welche die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ erfüllen, so kann mich die Formel $x^n + y^n = z^n$ anregen. Ich kann mich von einer Formel anregen lassen. Ich werde also sagen: Hier liegt eine *Anregung* vor, aber keine Frage. Die mathematischen »Probleme« sind immer solche Anregungen.

Diese Anregungen sind nicht etwa eine Vorbereitung auf ein Kalkül.

WAISMANN: Was bedeutet denn nun aber der Beweis, daß die nicht-euklidische Geometrie widerspruchsfrei ist? Denken wir an den einfachsten Fall, daß wir etwa die zwei-dimensionelle Riemannsche Geometrie auf der Kugel realisieren. Wir haben dann eine Übersetzung: Jedem Begriff, resp. jedem Lehrsatz der einen Geometrie entspricht ein Begriff, resp. ein Lehrsatz der anderen. Würden nun die Lehrsätze im einen Fall einen Widerspruch einschließen, so müßte sich dieser Widerspruch auch in der anderen Geometrie zu erkennen geben. Man kann also sagen: Das System der Riemannschen Axiome ist widerspruchsfrei, vorausgesetzt, daß es die euklidischen Axiome sind. Man hat dann die Widerspruchsfreiheit relativ zur euklidischen Geometrie nachgewiesen.

WITTGENSTEIN: Widerspruchsfreiheit »relativ zur euklidischen Geometrie« ist überhaupt Unsinn. Was hier geschieht, ist folgendes: Einer Regel entspricht wieder eine Regel (einer Konfiguration des Spiels eine Konfiguration des Spiels). Wir haben eine Abbildung. Schluß! Alles übrige, was noch gesagt wird, ist Prosa. Man sagt: *Also* ist das System widerspruchsfrei. Aber es gibt kein »also«, ebensowenig wie bei der Induktion.[39] Es hängt wieder damit zusammen, daß man den Beweis falsch auffaßt. Der Beweis ist der Beweis.

39. Siehe oben, S. 5 f. (F. H.)



2. Ele pensa na construção de duas-, quatro-, ... partes. E aqui surge o erro: pensa-se que, visto que se pode falar da divisão em dois e quatro, também se pode falar da divisão em três, assim como se pode contar duas, três e quatro maçãs. Mas a trissecção - se existisse - pertence a uma categoria completamente diferente, um sistema completamente diferente do que a divisão em duas e quatro partes. No sistema em que posso falar em divisão em duas e quatro partes, não posso falar em trissecção. Estas são estruturas *logicamente* muito diferentes!

Não posso trazer a divisão em dois, três e quatro para debaixo do mesmo teto, porque são formas completamente diferentes. Não se pode contar as formas como se contam coisas reais. Não podem ser agrupadas sob um conceito.

É como mexer as orelhas. O matemático é naturalmente guiado por associações, por certas analogias com o sistema anterior. Não estou dizendo: se alguém se ocupa com o teorema de Fermat, isto é errado ou injustificado. De jeito nenhum! Se eu, por exemplo, dispuser de um método para procurar por números inteiros que satisfaçam a equação $x^2 + y^2 = z^2$, posso me inspirar pela fórmula $x^n + y^n = z^n$. Posso me deixar inspirar por uma fórmula. Portanto direi: aqui há uma *inspiração*, mas não uma pergunta. Os “problemas” matemáticos são sempre estas inspirações.

Estas inspirações não são uma preparação para um cálculo.

WAISMANN: Mas o que significa a demonstração de que a geometria não-euclidiana é consistente? Vamos pensar no caso mais simples, em que efetivamos a geometria Riemanniana bidimensional numa esfera. Temos então uma tradução: cada conceito, ou seja, cada teorema de uma geometria corresponde a um conceito, ou seja, a um teorema da outra. Se os teoremas incluíssem uma contradição em um caso, esta contradição teria que ser reconhecida também na outra geometria. Portanto, pode-se dizer: o sistema dos axiomas de Riemann é consistente desde que os axiomas euclidianos o sejam. Demonstra-se então a consistência relativamente à geometria euclidiana.

WITTGENSTEIN: Consistência “relativamente à geometria euclidiana” é, de todo, um contrassenso. O que acontece aqui é o seguinte: uma regra corresponde a uma regra (uma configuração do jogo a uma configuração do jogo). Temos uma afiguração. É o suficiente! Tudo o mais que é dito a seguir é prosa. As pessoas dizem: *portanto*, o sistema é consistente. Mas não existe nenhum “portanto”, da mesma forma que no caso da indução.[39] Mais uma vez, isto tem a ver com uma concepção errônea da demonstração. A demonstração é a demonstração.

Um grupo de regras (configurações) está numa relação interna de similaridade com outro grupo de regras (configurações). Isto *é o que se mostra pela demonstração e nada mais*.

39. Ver acima, p. 6s. (N. E.)

Die eine Gruppe von Regeln (Konfigurationen) steht in ähnlichen internen Beziehungen zueinander wie die andere Gruppe von Regeln (*Konfigurationen*). Das *wird durch den Beweis gezeigt und sonst nichts*.

Unabhängigkeit II

Nehmen wir an, wir haben fünf Axiome. Wir machen nun die Entdeckung, daß eines von diesen Axiomen aus den vier anderen abgeleitet werden kann, also überflüssig war.[40] Ich frage nun: *Was bedeutet eine solche Entdeckung?*

Ich glaube, daß es sich damit genau ebenso verhält wie mit der Entdeckung Sheffers, daß man mit einer logischen Konstanten auskommt.[41]

Vor allem, machen wir uns klar: Die Axiome bestimmen - zusammen mit den Regeln des Vorwärrsschreitens im Kalkül - eine Gruppe von Sätzen. Dieser Bereich von Sätzen ist uns nicht etwa auch noch anderweitig gegeben, sondern *nur* durch die fünf Axiome. Wir können also nicht fragen: Ist *derselbe* Bereich vielleicht auch schon durch vier Axiome bestimmt? Denn der Bereich ist ja nichts Losgelöstes von diesen fünf Axiomen. Diese fünf Axiome und das, was aus ihnen entsteht, sind sozusagen meine ganze Welt. Aus dieser Welt kann ich nicht hinaus.

Wie steht es nun mit der Frage: Sind diese fünf Axiome unabhängig voneinander? Ich würde darauf erwidern: Gibt es eine Methode, diese Frage zu entscheiden? Hier können verschiedene Fälle ein treten.

1. *Es gibt keine solche Methode*. Dann liegt die Sache so, wie ich es geschildert habe: Alles, was ich habe, sind die fünf Axiome und die Regeln des Weiterschreitens. Ich kann nun nicht danach suchen, ob vielleicht *jemals* eines dieser Axiome als Folge der anderen herauskommen wird. Ich kann mir also die Frage der Unabhängigkeit gar nicht stellen.

Gesetzt nun aber, es kommt bei einem Beweis eines der Axiome als Ergebnis heraus, dann haben wir damit *nicht etwa* bewiesen, daß nur vier Axiome genügen, daß eines überflüssig ist, sondern ich habe eben nur bewiesen, daß dieses Axiom die Folge der und der Voraussetzungen ist. Nun werden Sie sagen: Gut, aber dann kann ich daraus weiter *schließen*, daß dieses Axiom überflüssig ist. Nein! Ich kann nicht durch einen logischen Schluß zu dieser Einsicht kommen, sondern ich muß es *sehen*, geradeso, wie Sheffer *gesehen* hat, daß er mit einer Konstante auskommt.

Ich muß in dem System, in dem ich mich bewege und in dem ich den Beweis führe, das neue System sehen.

Auf das Sehen kommt es an und nicht auf das Beweisen. Dem, was ich sehe - der Möglichkeit des Systems - entspricht kein Satz. Es wird nichts behauptet, also kann ich auch nichts beweisen.[42]

Daß ich das neue System sehe, ist gewissermaßen ein Glücksfall. Ich kann wohl zum neuen System übergehen; aber ich kann es nicht suchen, ich kann durch keine Umformung zu ihm gelangen und durch keinen Beweis seine Möglichkeit einsehen.

2a. *Es gibt eine Methode*, die Unabhängigkeit festzustellen, und zwar in dem Sinn, daß etwa das eine Axiom »p ∨ q« lautet, das andere »p«. Ich will verschiedene Axiome durch verschiedene

40. Siehe oben, S. 147. (F. H.)
41. Siehe oben, S. 139. (F. H.)
42. In dieser Passage sehen wir auch den Embryo dessen, was zwei Jahre später zur Methode der übersichtliche Darstellung werden wird: die Zusammenhänge anders sehen (MS 110, S. 257). (A. U.)

Independência II

Vamos supor que temos cinco axiomas. Agora descobrimos que um desses axiomas pode ser derivado dos outros quatro e que, por conseguinte, era supérfluo.[40] Agora pergunto: *o que significa uma descoberta assim?*

Acredito que ocorre aqui exatamente o mesmo que com a descoberta de Sheffer de que podemos nos virar com uma constante lógica.[41]

Acima de tudo, sejamos claros: os axiomas determinam - juntamente com as regras de progressão no cálculo - um grupo de proposições. Este domínio de proposições tampouco não nos é dado de nenhuma outra maneira, senão *somente* pelos cinco axiomas. Portanto, não podemos perguntar: talvez o *mesmo* domínio pode também já ser determinado por quatro axiomas? Pois o domínio não está para nada separado destes cinco axiomas. Estes cinco axiomas e o que surge deles são, por assim dizer, todo o meu mundo. Eu não posso sair deste mundo.

E quanto à pergunta: estes cinco axiomas são independentes uns dos outros? Sobre isto eu replicaria: existe um método para decidir esta questão? Vários casos podem surgir aqui.

1. *Não existe um método assim*. Neste caso a questão é como o rotulei: tudo o que tenho são os cinco axiomas e as regras de progressão. Não posso agora procurar saber se um desses axiomas *algum dia* será derivado como consequência dos outros. Portanto, não posso me colocar de nenhum modo a pergunta sobre a independência.

Supondo agora que um dos axiomas emerja como resultado de uma demonstração, então não demonstramos de *nenhum modo* que apenas quatro axiomas são suficientes, que um é supérfluo, senão que acabei de demonstrar que este axioma é a consequência de tais e tais pressuposições. Agora você dirá: bom, mas então posso *inferir* ainda que este axioma é supérfluo. Não! Não posso chegar a esta intuição por meio de uma inferência lógica, mas tenho que *vê-la*, assim como Sheffer *viu* que podia se virar bem com uma constante.

Tenho que ver o novo sistema no sistema em que me movo e no qual forneço as evidências.

O que conta é ver, não provar. Nenhuma proposição corresponde ao que vejo - a possibilidade do sistema. Nada é afirmado, então também não posso demonstrar nada.[42]

Ver o novo sistema é, de certa forma, um golpe de sorte. Provavelmente posso passar para o novo sistema; mas não posso procurá-lo, não posso alcançá-lo por meio de qualquer transformação e ver sua possibilidade mediante uma demonstração.

2a. *Existe um método* de estabelecer independência no sentido em que um axioma diz que "p ∨ q", e o outro diz que "p". Eu quero apresentar axiomas diferentes por meio de letras diferentes e, além disso, expressar as funções de verdade. Então, deve ser fácil ver se um axioma se segue do outro ou não. Portanto, se o que se quer dizer por independência for *isto*, então este não é um problema sério de forma alguma.

Suponha que eu fizesse uma lista das pessoas presentes aqui na sala, e anotasse o Prof. Schli-

40. Ver acima, p. 148. (N. E.)
41. Ver acima, p. 140.. (N. E.)
42. Nesta passagem podemos ver também o embrião do que dois anos depois se transformará no método de apresentação panorâmica: enxergar as conexões de uma outra forma (MS 110, p. 257). (N. T.)

Buchstaben darstellen und außerdem die Wahrheitsfunktionen zum Ausdruck bringen. Dann muß es ein Leichtes sein, zu sehen, ob ein Axiom aus einem anderen folgt oder nicht. Wenn also mit Unabhängigkeit *das* gemeint ist, dann liegt hier gar kein ernstes Problem vor.

Gesetzt, ich würde ein Verzeichnis der hier im Zimmer anwesenden Personen machen und den Herrn Prof. Schlick zweimal aufschreiben. Dann füge ich die Regel hinzu: Wenn eine Angabe bereits in einer anderen enthalten ist, dann soll sie weggelassen werden. Ich meine, es ist dann kein Problem, die Unabhängigkeit der Angabe zu prüfen. Sie werden mit Recht sagen: Also schreiben Sie das Verzeichnis gleich richtig hin! Dazu ist nicht erst eine Untersuchung der Unabhängigkeit nötig, und so verhält es sich auch hier.

Nun werden Sie mir erwidern: Aber so ist das ja nicht gemeint! Das führt uns auf einen anderen Fall.

2b. *Es gibt eine andere, nicht triviale Methode*, die Unabhängigkeit festzustellen. Dann bedeutet das Wort »Unabhängigkeit« etwas anderes.

Eine solche Methode könnte z. B. darin bestehen: Ich nehme vier Axiome, füge die Negation des fünften hinzu und zeige, daß dieses so abgeänderte Axiomensystem eine Anwendung zuläßt (Modellmethode). Wenn ich also in diesem Fall fünf Axiome angebe, wo deren vier genügen, dann habe ich mich einfach eines Versehens schuldig gemacht. Denn ich hätte ja gleich von Anfang an wissen können, daß eines von diesen fünf Axiomen überflüssig war, und wenn ich es dennoch angeschrieben habe, so war das eben ein Fehler. Freilich genügt es in diesem Fall nicht nur, die Axiome aufzustellen, sondern man muß noch außerdem beweisen, daß sie wirklich den Charakter der Unabhängigkeit besitzen.

Dieses letzte Verfahren scheint nun Hilbert in der Geometrie einzuschlagen.[43][44] Allerdings bleibt dabei ein wichtiger Punkt ungeklärt: Ist die Modellmethode eine *Methode*? Kann ich systematisch nach einem Modell suchen oder bin ich auf die Gunst des Zufalls angewiesen? Was dann, wenn ich kein passendes Modell finden kann?

Zusammenfassung

Die Frage, ob ein Axiomen-System unabhängig ist, hat nur dann einen Sinn, wenn es ein Verfahren gibt, diese Frage zu entscheiden. Andernfalls kann man die Frage gar nicht aufwerfen, und wenn man z.B . entdeckt, daß ein Axiom überflüssig ist, so hat man damit keinen Satz bewiesen, sondern im alten System ein neues System hineingesehen.

Und ebenso verhält es sich mit der Widerspruchsfreiheit.

Hilberts Axiome I, 1 und I, 2[45]

»2 von einander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a«

»Irgend 2 von einander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade«

43. *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1899, S. 22 ff. Die hier angewendete Methode (nämlich die eine Interpretation der nicht-euklidischen Geometrie innerhalb der euklidischen Geometrie zu finden) ist eine absolut normale, und es ist nicht klar, warum Wittgenstein sagt, daß Hilbert sie einzuschlagen »scheint«. (F. H.)

44. Was unser Herausgeber hier, B. McGuinness, damals nicht zu verstehen scheint, ist, dass Wittgenstein bereits signalisierte, dass Hilbert ein neues Spiel mit neuen Regeln in einem anderen System vorgeschlagen hatte: völlig anders als das euklidische System. (A. U.)

45. A. a. o. S. 5. In späteren Ausgaben erscheint eine kleine Änderung. (F. H.)

ck duas vezes. Em seguida, adiciono a regra: se um item já estiver contido em outro, ele deve ser omitido. Quero dizer, então não há problema em verificar a independência das informações. Você dirá com razão: então, escreva a lista corretamente! Isto não requer uma investigação prévia de independência, e este também é o caso aqui.

Agora você irá replicar: mas não é assim que quis dizer! Isto nos leva a outro caso.

2b. *Existe um outro método, não trivial*, de estabelecer a independência. Então, a palavra "independência" significa outra coisa.

Tal método poderia consistir, por exemplo, nisto: tomo quatro axiomas, adiciono a negação do quinto e mostro que este sistema de axiomas, assim modificado, permite uma aplicação (método do modelo). Portanto, se neste caso eu especificar cinco axiomas, onde quatro são suficientes, então sou simplesmente culpado de um descuido. Porque eu poderia saber desde o início que um desses cinco axiomas era supérfluo e, se de qualquer modo o escrevi, isto foi apenas um erro. Neste caso, admitidamente, não basta apenas enunciar os axiomas, mas também é preciso demonstrar que eles realmente têm o caráter de independência.

Pois bem, este último procedimento é o que Hilbert parece perseguir na geometria.[43][44] No entanto, um ponto importante permanece sem solução: o método do modelo é um *método*? Posso procurar sistematicamente por um modelo ou dependo dos favores do acaso? E se eu não conseguir encontrar um modelo adequado?

Resumo

A questão de saber se um sistema de axiomas é independente só faz sentido se houver um procedimento para decidir essa questão. Caso contrário, não se pode levantar a questão de forma alguma, e se, por exemplo, alguém descobre que um axioma é supérfluo, não demonstrou com isto nenhuma proposição, mas viu um novo sistema no sistema antigo.

E acontece a mesma coisa com a consistência.

Axiomas de Hilbert I, 1 e I, 2[45]

"2 pontos distintos A, B sempre determinam uma linha reta a".

"Quaisquer dois pontos distintos em uma linha reta determinam esta linha reta".

43. *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1899, p. 22ss. O método aplicado aqui (a saber, encontrar uma interpretação da geometria não euclidiana dentro da geometria euclidiana) é absolutamente normal, e não está claro por que Wittgenstein diz que Hilbert "parece" persegui-lo. (N. E.)

44. O que o nosso editor aqui, McGuinness, não parece compreender na época é que Wittgenstein já sinalizava que Hilbert tinha proposto um novo jogo, com novas regras, num outro sistema: completamente diferente do sistema euclidiano. (N. T.)

45. *Op. cit.*, p. 5. Nas edições posteriores aparece uma pequena modificação aqui. (N. E.)

Ich weiß schon nicht, wie diese Axiome aufzufassen sind, welche ihre logische Form ist.

WAISMANN: Man kann sie ja als Wahrheitsfunktion schreiben, indem man z.B. sagt: »Wenn x ein Punkt ist, dann ... für alle x.« Ich glaube allerdings, daß man auf diese Weise den eigentlichen Sinn der Axiome verfehlt. Wir dürfen die Punkte nicht nacheinander einführen. Viel richtiger scheint es mir, die Punkte, Geraden, Ebenen durch Koord⟨inaten⟩ sozusagen mit einem Schlag einzuführen.

WITTGENSTEIN: Das glaube ich auch. Aber ich verstehe eines nicht: Was würde es denn heißen, daß diese Axiome einen Widerspruch bilden? Die Sache ist die: So, wie sie dastehen, können sie keine Kontradiktion ergeben, es sei denn, ich bestimme durch eine Regel, daß ihr logisches Produkt eine Kontradiktion ist. Es verhält sich nämlich mit dem Widerspruch genau so, wie mit dem Widerspruch der Sätze: »Dieser Fleck ist grün« und »Dieser Fleck ist rot«. So, wie sie dastehen, widersprechen ja diese Sätze einander gar nicht. Sie widersprechen einander erst, sobald wir eine weitere Regel der Syntax einführen, die es verbietet, beide Sätze als wahr zu betrachten. Erst dann ergibt sich eine Kontradiktion.

Ich meine nun: Jeder Widerspruch muß kontradiktorisch, nicht konträr sein. Wenn ich z.B. in der Geometrie bei einem Beweis herausbekomme, die Winkelsumme im Dreieck ist gleich 180°, bei einem andern Beweis, die Winkelsumme ist größer als 180°, so ist das durchaus kein Widerspruch. Es könnten ja beide nebeneinander bestehen, ja ich kann mir sogar einen Fall denken, wo wir ein solches Axiomen-System sogar anwenden würden: wenn etwa die Winkelsumme eines Dreiecks, nach *einem* Meßverfahren bestimmt, einen Wert, nach einem andern Verfahren bestimmt, einen andern Wert hätte.

Erst wenn ich durch eine Regel der Syntax postuliere, daß das Produkt eine Kontradiktion ist, habe ich eine Kontradiktion. (Vgl. früher.)[46]

⟨*Kalkül und Prosa*⟩

Es ist ein merkwürdiger Irrtum der Mathematiker, daß manche von ihnen glauben, daß durch eine Kritik der Grundlagen etwas *in* der Mathematik fortfallen könnte. Ein Teil der Mathematiker hat den ganz richtigen Instinkt: Was wir einmal *gerechnet* haben, kann doch nicht fortfallen und verschwinden! In der Tat, das, was durch die Kritik zum Verschwinden gebracht wird, das sind die Namen, die Anspielungen, die im Kalkül vorkommen, also das, was ich die *Prosa* nennen möchte. Es ist sehr wichtig, zwischen dem Kalkül und dieser Prosa auf das strengste zu unterscheiden. Hat man sich diese Scheidung einmal klar gemacht, so fallen alle diese Fragen wie die nach Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit etc. weg.

Frege und Wittgenstein II

WAISMANN FORMULIERT DEN UNTERSCHIED ZWISCHEN FREGE UND WITTGENSTEIN: Für Frege besteht die Alternative: ein Zeichen hat entweder eine Bedeutung, d. h., es vertritt einen Gegenstand - das logische Zeichen den logischen Gegenstand, das arithmetische Zeichen den arithmetischen Gegenstand - oder es ist nur die mit Tinte auf das Papier gemalte

46. Offenbar ein Hinweis auf S. 145 oben. (F. H.)

Não sei como esses axiomas devem ser concebidos, qual é sua forma lógica.

WAISMANN: pode-se escrevê-los como uma função de verdade dizendo, por exemplo: “Se x é um ponto, então, para todo x ...” Mas acredito que desta forma se perde o sentido real dos axiomas. Não devemos introduzir os pontos um após o outro. Parece-me muito mais correto introduzir os pontos, retas e planos por meio de coord⟨enadas⟩, por assim dizer, de uma só vez.

WITTGENSTEIN: Eu também acho. Mas há uma coisa que não compreendo: o que significa dizer que estes axiomas formam uma contradição? A questão é que: da maneira como estão, não podem resultar em contradição, a menos que eu determine por uma regra que seu produto lógico é uma contradição. Ou seja, acontece com a contradição exatamente o mesmo que com a contradição entre proposições: “Esta mancha é verde” e “Esta mancha é vermelha”. Do jeito que estão, estas proposições não se contradizem de forma alguma. Eles apenas se contradizem assim que introduzimos outra regra de sintaxe que proíbe ambas as sentenças de serem consideradas verdadeiras. Só então surge uma contradição.

Quero dizer agora: toda contradição tem que ser uma contradição lógica, não uma contrariedade. Se, por exemplo, eu descobrir em uma demonstração geométrica que a soma dos ângulos no triângulo é igual a 180 °, e em outra demonstração que a soma dos ângulos é maior que 180 °, isto não é uma contradição. Ambas poderiam existir lado a lado, e posso até imaginar um caso em que poderíamos aplicar tal sistema de axiomas: se, por exemplo, a soma dos ângulos de um triângulo, determinada por *um* procedimento de medição, seja igual a um valor, e determinado por outro procedimento, tenha um valor diferente.

Somente quando postulo por meio de uma regra de sintaxe que o produto é uma contradição é que tenho uma contradição. (Compare acima.)[46]

⟨*Cálculo e prosa*⟩

É um erro curioso dos matemáticos que alguns deles acreditem que, mediante uma crítica dos fundamentos, algo na matemática poderia desmoronar. Uma parte dos matemáticos tem o instinto correto: o que uma vez *calculamos* não pode desmoronar e desaparecer! Na verdade, o que se leva a desaparecer pela crítica são os nomes, as alusões que aparecem no cálculo, portanto aquilo que eu gostaria de chamar de *prosa*. É muito importante fazer a mais estrita distinção entre o cálculo e esta prosa. Depois de deixar claro esta separação para si mesmo, é que são eliminadas todas essas questões como consistência, independência etc.

Frege e Wittgenstein II

WAISMANN FORMULA A DIFERENÇA ENTRE FREGE E WITTGENSTEIN: para Frege existe a alternativa: um sinal ou tem um significado, isto é, representa um objeto - o sinal lógico do objeto lógico, o sinal aritmético do objeto aritmético -, ou é apenas a figura desenhada com tinta no papel.

46. Evidentemente, uma referência à p. 146, acima. (N. E.)

Figur.

Aber diese Alternative besteht nicht zu Recht. Es gibt, wie schon das Schachspiel zeigt, etwas Drittes: Der Bauer im Schachspiel hat weder eine Bedeutung in dem Sinn, daß er etwas vertritt, daß er Zeichen *von* etwas ist, noch ist er bloß die aus Holz geschnitzte Figur, die auf einem Holzbrett herumgeschoben wird. Was der Bauer ist, wird erst durch die Regeln des Schachspiels bestimmt.

Dieses Beispiel zeigt, daß wir nicht sagen dürfen: Ein Zeichen ist entweder Zeichen von etwas, oder es ist nur das sinnlich wahrnehmbare Gebilde. Etwas am Formalismus ist also berechtigt, und Frege hatte diesen richtigen Kern nicht gesehen.[47]

Die »Bedeutung« des Bauern ist, wenn man will, die Gesamtheit der Regeln, die für ihn gelten. Und so kann man auch sagen: Die Bedeutung eines Zahlzeichens ist die Gesamtheit der Regeln, die für dasselbe gelten.

WITTGENSTEIN STIMMT ZU.[48]

WAISMANN LIEST FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik*, II,§ 107: »Erinnern wir uns nun, daß die Theorie des Spiels vom Spiele selbst zu unterscheiden ist! Die Spielhandlungen geschehen zwar nach den Regeln; aber die Regeln sind nicht Gegenstände des Spiels, sondern Grundlage der Theorie des Spiels. Die Züge des Schachspiels geschehen zwar nach Regeln; aber keine Stellung der Schachfiguren und kein Zug drückt eine Regel aus; denn die Aufgabe der Figuren im Schachspiel ist überhaupt nicht, etwas auszudrücken, sondern nach Regeln bewegt zu werden. Wenn man also die formale Arithmetik als Spiel betrachtet, so ist die Formel »a + a' = a' + a« als Ausdruck einer Regel dieses Spiels eine der Grundlagen von dessen Theorie, auf der in dieser Schlüsse aufgebaut werden können; aber sie ist nicht etwas, mit dem im Spiele Veränderungen vorgenommen werden, kein Gegenstand des Spiels, nicht einer Stellung von Schachfiguren zu vergleichen, sondern dem Wortausdruck einer Regel des Schachspiels.«

§ I08: » Wir bemerken .. . , daß Gleichungen hier eine doppelte Rolle spielen: erstens im Spiele selbst, wo sie ebenso wenig wie die Stellungen der Schachfiguren etwas ausdrücken, und zweitens in der Theorie des Spiels, wo sie zunächst die Regeln, dann aber auch . . .. Folgerungen aus den Regeln auszudrücken haben. Nun denke man sich einmal das Entsprechende beim Schachspiele! Dann würden die Spielregeln durch Gruppen von Schachfiguren ausgedrückt, die auch im Spiele selbst vorkommen könnten ... Mit anderen Worten: es müßte eine Sprache gegeben sein, deren Ausdrucksmittel die Schachfiguren und ihre Stellungen auf dem Schachbrette wären. Es könnte dann vorkommen, daß eine Figurengruppe in doppelter Weise zu betrachten wäre: erstens im Spiel selbst, wo sie gar nichts ausdrückte ... ; zweitens in der Theorie des Spiels, wo sie ein Lehrsatz wäre, also einen Sinn hätte.«

Hier tritt also klar hervor, daß das Gleichheitszeichen eine Regel ist, die eine Erlaubnis erteilt, nämlich die der Ersetzung eines Zeichens durch ein anderes, daß sie aber zugleich eine Konfiguration *in* der Arithmetik ist.

WITTGENSTEIN BEMERKT DAZU: Man kann das Problem in folgende Form bringen:
Wenn ich von den Gleichungen:

47. Siehe S.117s oben u. Anm. (F. H.)

48. Wenn Wittgenstein dem zustimmt, was Waismann gesagt hat, gibt er etwas anderes zu als das, was er über Sprachspiele sagen wird, nämlich dass "...die Bedeutung eines Wortes ist sein Gebrauch in der Sprache" (PU § 43). Das heißt, der Schwerpunkt liegt nicht auf der Folgen von Regeln, sondern auf der *Gebrauch* innerhalb eines Kontextes. (A. U.)

Mas não existe esta alternativa, de direito. Como o jogo de xadrez já mostra, existe uma terceira possibilidade: o peão no xadrez não tem significado nem no sentido de que representa algo, de que é um sinal *de* algo, nem é meramente a figura esculpida em madeira em cima de um tabuleiro de madeira sendo empurrado. O que o peão é só é determinado pelas regras do jogo de xadrez.

Este exemplo mostra que não devemos dizer: um sinal ou é um sinal de algo ou é apenas a estrutura que pode ser percebida pelos sentidos. Portanto, algo sobre o formalismo se justifica, e Frege não tinha visto este correto cerne.[47]

O "significado" do peão é, se quisermos, o conjunto de regras que valem para ele. E assim pode-se também dizer: o significado de um sinal numérico é a totalidade das regras que valem para ele.

WITTGENSTEIN CONCORDA.[48]

WAISMANN LÊ FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik*, II, § 107: "Lembremos agora que a teoria do jogo deve ser distinguida do jogo em si! As ações do jogo acontecem de acordo com as regras; mas as regras não são objetos do jogo, mas a base da teoria do jogo. Os movimentos no jogo de xadrez são feitos de acordo com regras; mas nenhuma posição das peças de xadrez e nenhum movimento expressam uma regra; porque a tarefa das peças em um jogo de xadrez não é expressar algo, mas mover-se de acordo com as regras. Então, se alguém considera a aritmética formal como um jogo, a fórmula "a + a' = a'+ a" como uma expressão de uma regra deste jogo é um dos fundamentos de sua teoria sobre a qual conclusões podem ser construídas; mas não é algo com o qual mudanças são feitas no jogo, não é um objeto do jogo, não deve ser comparado a uma posição de peças de xadrez, mas à expressão verbal de uma regra do jogo de xadrez."

§ I08: "Notamos .... que as equações desempenham aqui um papel duplo: primeiro no próprio jogo, onde não expressam nada, como as posições das peças de xadrez, e segundo na teoria do jogo, onde primeiro definem as regras, mas depois também. .. têm que expressar inferências das regras. Agora pense no equivalente ao jogo de xadrez! Então as regras do jogo seriam expressas por grupos de peças de xadrez, que também poderiam aparecer no próprio jogo ... Ou seja: deveria haver uma linguagem cujo meio de expressão seriam as peças de xadrez e suas posições sobre o tabuleiro de xadrez. Poderia então acontecer que um grupo de peças tivesse que ser visto de duas maneiras: primeiro, no próprio jogo, onde não expressa nada ...; segundo, na teoria do jogo, onde seria uma doutrina, ou seja, faria sentido ".

Aqui fica claro que o sinal de igual é uma regra que concede permissão, ou seja, a substituição de um sinal por outro, mas que é ao mesmo tempo uma configuração *dentro da* aritmética.

OBSERVAÇÕES DE WITTGENSTEIN: pode-se colocar o problema da seguinte forma:
Se eu das equações:

$$4 = 2 + 2$$
$$2 = 1 + 1$$

passar para a equação

$$4 = (1 + 1) + (1 + 1),$$

47. Ver, acima, p. 118s e nota de rodapé. (N. E.)

48. Se Wittgenstein concorda com o que disse Waismann, admite algo diferente do que dirá acerca dos jogos delinguagem, a saber, que "...o significado de uma palavra é o seu uso na linguagem" (IF § 43). Isto é, a ênfase não recai sobre o seguimento de regras, mas sobre o *uso* dentro de um contexto. (N. T.)

$$4 = 2 + 2$$
$$2 = 1 + 1$$

übergehe zu der Gleichung

$$4 = (1+1) + (1+1),$$

dann kann man fragen: Sind wir *von* den beiden ersten Gleichungen zur dritten gelangt oder von der ersten *mittels* der zweiten zu der dritten Gleichung gelangt?

D. h., sind die beiden Gleichungen die Konfigurationen, *von* welchen aus wir durch einen Schluß z.B. zur dritten Gleichung gelangt sind, oder stellt die zweite Gleichung die *Regel* dar, *nach* der wir die erste Gleichung in die dritte umgeformt haben?

Mir scheint: in beiden Fällen meinen wir haarscharf dasselbe.

(Ich weiß, daß diese ganze Frage gar kein für die Grundlage der Arithmetik wesentliches Problem ist.)

Ich könnte sagen: Ich bilde das logische Produkt

$$(4 = 2 + 2) . (2 = 1 + 1)$$

und nun brauche ich eine Regel, die es mir erlaubt, die Gleichung

$$4 = (1 + 1) + (1 + 1)$$

hinzuschreiben. Der Ausdruck dieser Regel kann nicht die Gleichung $2 = 1 + 1$ sein, so wenig wie etwa im »modus ponens«

$$\begin{array}{l} p \\ p \supset q \\ q \end{array}$$

die Verbindung »$p \supset q$« der Ausdruck der Schlußregel ist. Die Schlußregel kann überhaupt nicht durch einen Satz ausgedrückt werden. Ich meine nun, daß sich auch die Ersetzungsregel nicht durch die Gleichung $2 = 1 + 1$ ausdrücken läßt. Wohl aber können wir sagen: Die Regel und die Gleichung haben etwas miteinander gemein, nämlich die logische Multiplizität, und *deshalb* können wir die Regel gleichsam auf diese Gleichung *projizieren*. Wenn ich nämlich frage: Wie bin ich von der Gleichung $4 = 2 + 2$ zu der Gleichung $4 = (1 + 1) + (1 + 1)$ gekommen, so kann ich sagen: durch eine Regel, die es mir erlaubt, 2 durch $1 + 1$ zu ersetzen. Diese jetzt in Worten ausgedrückte Regel und die Gleichung $2 = 1 + 1$ entsprechen einander, sind aber nicht identisch (?).

Sonntag, 4. Januar 1931 (*bei Schlick*)

⟨GLEICHUNG UND ERSETZUNGSREGEL I⟩

$$\begin{array}{c} 2 + 2 = 4 \\ 1 + 1 = 2 \\ \hline (1 + 1) + (1 + 1) = 4 \end{array}$$

Kann ich sagen: Ich habe die erste Gleichung mittels der zweiten - als Regel aufgefaßt - umgeformt und dadurch die dritte Gleichung erhalten? Wenn ich das sage, so sieht das so aus, als wäre die eine Gleichung vor der anderen *bevorzugt*. Mir scheint, daß eine solche Auffassung keinen Sinn hat. Um das klar zu machen, denken Sie sich, daß ich die beiden ersten Gleichungen aufgeschrieben habe und jemand frage: Wie wirst du vorgehen? Nach der ersten Gleichung *oder* nach der zweiten Gleichung? Man sieht dann sofort ein, daß man so nicht fragen kann. Wir haben *beide* Gleichungen nötig, eine allein reicht nicht aus.

pode-se perguntar: chegamos *das* duas primeiras equações para a terceira, ou da primeira para a terceira equação *por meio* da segunda?

Ou seja, as duas equações são as configurações a partir *das* quais chegamos à terceira equação mediante uma inferência, por exemplo, ou a segunda equação representa a *regra segundo a qual* transformamos a primeira equação na terceira?

Parece-me: em ambos os casos queremos dizer exatamente a mesma coisa.

(Eu sei que toda esta questão não é um problema essencial para os fundamentos da aritmética.)

Eu poderia dizer: eu formo o produto lógico

$$(4 = 2 + 2). (2 = 1 + 1)$$

e agora preciso de uma regra que me permita escrever a equação

$$4 = (1 + 1) + (1 + 1).$$

A expressão desta regra não pode ser a equação $2 = 1 + 1$, não mais do que no “modus ponens”

$$\begin{array}{l} p \\ p \supset q \\ \hline q \end{array}$$

a conexão “$p \supset q$” é a expressão da regra de inferência. A regra de inferência não pode ser, em absoluto, expressa por uma proposição. Quero dizer agora que a regra de substituição também não pode ser expressa pela equação $2 = 1 + 1$. Mas podemos dizer: a regra e a equação têm algo em comum, a saber, a multiplicidade lógica e, *por conseguinte*, podemos *projetar* a regra nesta equação, por assim dizer. Se eu perguntar: como passei da equação $4 = 2 + 2$ para a equação $4 = (1 + 1) + (1 + 1)$, posso dizer: por uma regra que me permite 2 a ser substituído por $1 + 1$. Esta regra, agora expressa em palavras, e a equação $2 = 1 + 1$ correspondem uma à outra, mas não são idênticas (?).

Domingo, 4 de Janeiro de 1931 (*na casa de Schlick*)

⟨EQUAÇÃO E REGRA DE SUBSTITUIÇÃO I⟩

$$\begin{array}{c} 2 + 2 = 4 \\ 1 + 1 = 2 \\ \hline (1 + 1) + (1 + 1) = 4 \end{array}$$

Posso dizer: transformei a primeira equação por meio da segunda - concebida como regra - e assim obtive a terceira equação? Quando digo isto, parece que uma equação *tem preferência* sobre a outra. Parece-me que tal concepção não faz sentido. Para tornar isto claro, imagine que eu escrevi as duas primeiras equações e alguém está perguntando: como você vai fazer isso? De acordo com a primeira equação *ou* de acordo com a segunda equação? Você pode então ver imediatamente que não pode fazer perguntas como esta. Precisamos das *duas* equações; uma só não é suficiente.

Ich will es noch deutlicher formulieren. Wenn man meint, daß die eine der beiden Gleichungen *allein* die Regel sei, so muß man fragen: allein - im Gegensatz wozu? Ich kann sagen: Ich bin nach der Regel 1 + 1 = 2 vorgegangen, im Gegensatz, sagen wir, zur Regel 1 + 1 = 3; ich bin nach der Regel 2 + 2 = 4 vorgegangen im Gegensatz zu der Regel 2 + 2 = 5. Aber ich kann nicht sagen: Ich bin nach der Regel 1 + 1 = 2 vorgegangen im Gegensatz zur Regel 2 + 2 = 4, denn diese beiden Regeln stehen ja gar nicht in Gegensatz zueinander! Ich kann daher auch nicht sagen: Ich bin *nur* nach der Regel 1 + 1 = 2 vorgegangen, und dies zeigt schon, daß beide Gleichungen gleichberechtigt sind und folglich nicht die eine von ihnen der Ausdruck der Umformungsregel ist.

Bei dieser ganzen Überlegung ist aber noch ein anderer Umstand zu beachten, der die ganze Sache unklar macht, und das ist folgender: Denken Sie sich, ich schreibe die folgenden Zahlen untereinander:

1 2 3 4 5
1 4 9 I6 25

und ich frage Sie jetzt: Verstehen Sie schon die Regel? Können Sie also weitergehen? »Ja. « Können Sie also die Regel anwenden? »Ja.« Wenden Sie nun die Regel in der Weise an, daß Sie sich im stillen den Ausdruck der Regel jedesmal vorsagen? Wenn Sie z. B. Schach spielen, sagen Sie sich da vor jedem einzelnen Zug die Regel vor? »Nein!«

Daß Sie die Regel verstehen und sie anwenden, ohne sie sich vorzusagen, ist sehr wichtig. Man könnte nämlich glauben, daß das Untereinanderschreiben der Zahlen noch gar nicht der Ausdruck der Regel war, sondern daß ich sie z. B. so ausdrücken müßte:

x ( )
oder so:
x^2 $(\ )^2$

Man könnte nämlich sagen, daß die Regel darin bestehe, die Reihe der natürlichen Zahlen zu bilden und *immer* das Quadrat darunter zu schreiben. Die Regel sei also *allgemein* und diese Allgemeinheit komme in der ursprünglichen Formulierung doch nicht zum Ausdruck. Aber das ist ein Irrtum. Die Buchstaben sind nämlich gar nicht der Ausdruck der Allgemeinheit, denn die Allgemeinheit kommt überhaupt nicht in den Symbolen zum Ausdruck, sondern zeigt sich in der Induktion. Eine Formel der Algebra entspricht einer Induktion, aber sie drückt die Induktion nicht aus, denn diese ist unausdrückbar.

Wenn ich also schreibe:

$$\begin{matrix} x \\ x^2 \end{matrix}$$

so wüßte ich damit noch nicht, wie ich diese Regel anzuwenden habe ; ich habe also damit nicht etwa die *allgemeine* Regel zum Ausdruck gebracht, sondern ich habe wieder nur eine bestimmte Konfiguration von Buchstaben gebildet; denn x ist ja ein ebenso individuelles Zeichen wie 1, 2, 3. Die Regel läßt sich überhaupt nicht durch eine einzelne, konkrete Konfiguration ausdrücken, also auch nicht durch die oben hingeschriebene, sondern das Wesentliche an ihr, die Allgemeinheit, ist unausdrückbar. Die Allgemeinheit zeigt sich in der Anwendung. Diese Allgemeinheit muß ich in die Konfiguration *hineinsehen*.[49] Die allgemeine Regel sehe ich aber in dem Ausdruck

$$\begin{matrix} x \\ x^2 \end{matrix}$$

49. Diese Aspektsehen, die sich aus den Formulierungen des Zeigens im Gegensatz zum Sagen im der Logisch-Philosophische Abhandlung kommen, ist eine noch beginnende Art, in der Wittgenstein seine pragmatische (oder praxiologische) Auffassung von Mathematik und Sprache ausdrückt. Man sieht die Regel „von innen", gerade weil sie in der Praxis verwendet bzw. benutzt wird. (A. U.)

Quero deixar isto ainda mais claro. Se alguém pretende dizer que apenas uma das duas equações *por si só* é a regra, tem-se que perguntar: por si só - em oposição a quê? Posso dizer: segui a regra 1 + 1 = 2 por oposição à regra, digamos, 1 + 1 = 3; eu segui a regra 2 + 2 =4 por oposição à regra 2 + 2 = 5. Mas não posso dizer: segui a regra 1 + 1 = 2 por oposição à regra 2 + 2 = 4, porque estas duas regras não se contradizem! Não posso, portanto, dizer: procedi *somente* de acordo com a regra 1 + 1 = 2, e isto já mostra que as duas equações são iguais e, por conseguinte, nenhuma delas é a expressão da regra de conversão.

Em toda esta consideração há uma outra circunstância a ser levada em conta que torna tudo obscuro, e é a seguinte: Imagine, escrevo os seguintes números um debaixo do outro:

1 2 3 4 5
1 4 9 I6 25

e agora te pergunto: você já compreendeu a regra? Então você pode continuar? "Sim." Então você pode aplicar a regra? "Sim." Você agora aplica a regra de tal forma que recita silenciosamente a expressão da regra para si mesmo todas as vezes? Se você, por exemplo, joga xadrez, você diz para si mesmo a regra antes de cada jogada? "Não!"

Compreender a regra e aplicá-la sem dizer a si mesmo é muito importante. Alguém poderia pensar que escrever os números um sobre o outro não era a expressão da regra, mas que ela, por exemplo, teria que ser expressa assim:

x ( )
ou assim:
x^2 $(\ )^2$

Pode-se dizer que a regra é pegar a série de números naturais e *sempre* escrever o quadrado na linha debaixo. A regra é, portanto, *geral*, e esta generalidade não é expressa na formulação original. Mas isto é um erro. As letras não são de forma alguma a expressão da generalidade, pois a generalidade, afinal, não é expressa nos símbolos, mas se mostra na indução. Uma fórmula da álgebra corresponde a uma indução, mas não expressa a indução porque esta é inexprimível.

Então, quando escrevo:

$$\begin{matrix} x \\ x^2, \end{matrix}$$

ainda não sei como aplicar esta regra; portanto, não expressei a regra *geral*, senão que novamente apenas formei uma certa configuração de letras; porque x é um sinal tão individual quanto 1, 2, 3. A regra não pode ser expressa por uma única configuração concreta, portanto não pode ser expressa por aquela configuração escrita acima, mas a sua parte essencial, a generalidade, é inexprimível. A generalidade se mostra na aplicação. Eu tenho que *enxergar por dentro* esta generalidade na configuração.[49] Mas eu vejo a regra geral na expressão

$$\begin{matrix} x \\ x^2 \end{matrix}$$

nem melhor nem pior do que vi anteriormente nos números individuais. Tenho que enxergar a regra por dentro na expressão das letras, bem como na expressão dos números, e se não o fizer, as letras não têm nenhuma utilidade para mim.

Eu não "*aplico*" a regra

$$\begin{matrix} x \\ x^2 \end{matrix}$$

49. Esta visão de aspecto que provém das formulações do mostrar-se como contraposto ao dizer, presentes no TLP, é a maneira ainda incipiente como Wittgenstein expressa sua concepção pragmática (ou praxiológica) da matemática e da linguagem. Consegue-se ver a regra "por dentro", justamente porque se a emprega ou se a utiliza na prática. (N. T.)

nicht besser und nicht schlechter als ich sie vorhin bei den einzelnen Zahlen gesehen habe. Ich muß die Regel in den Buchstabenausdruck ebenso hineinsehen wie in den Zahlenausdruck, und tue ich das nicht, so nützen mir die Buchstaben gar nichts.

Ich habe nicht die Regel

$$\begin{array}{c} x \\ x^2 \end{array}$$

auf die einzelnen Zahlen »*angewendet*«, denn sonst brauchte ich wieder eine Regel, die mir sagt, wie ich aus dem Buchstabenausdruck die Bildung der Zahlenreihe entnehmen kann. Und wenn ich eine solche Regel aufstellen wollte, und zwar in Buchstaben, so wäre ich wieder nicht weitergekommen: Ich brauchte eine neue Regel, die mir sagt, wie ich sie anzuwenden habe u.s.f.

Die Regel ist nicht so wie der Mörtel zwischen zwei Ziegeln.

Wir können nicht eine Regel aufstellen, um eine andere Regel anzuwenden. Wir können nicht eine Regel »mittels« einer Regel anwenden.

Wir kommen hier überhaupt auf einen sonderbaren Irrtum, der darin besteht, daß man meint, daß man in der Logik zwei Dinge durch ein drittes Ding miteinander verknüpfen kann, [daß etwas vermittelt wird]. Man stellt sich dabei zwei Dinge vor, die durch ein Seil miteinander verbunden sind. Aber das ist ein irreführendes Bild. Denn wie verbindet sich nun das Seil mit dem Ding? [Die Dinge müssen sich direkt miteinander verbinden, ohne Seil, d. h., sie müssen schon in Verbindung miteinander stehen, so wie die Glieder einer Kette.][50]

Auf dieser falschen Auffassung beruht die Schwierigkeit, auf die man bei der Frage stößt: Wie *kann* man die Regel anwenden? Die Antwort scheint zu lauten : Wieder durch eine Regel, und so käme man nie von der Stelle.

Zwischen den Ausdruck

$$\begin{array}{c} x \\ x^2 \end{array}$$

und die Anwendung auf die Zahlen schiebt sich nicht wieder eine Regel ein, wie der Mörtel zwischen den Ziegeln, sondern ich muß die Art der Anwendung der Regel bereits in den Ausdruck hineinsehen. - Nun kehren wir wieder zu unserer Frage zurück.

$$\begin{array}{c} 2 + 2 = 4 \\ 1 + 1 = 2 \\ \hline (1+1) + (1+1) = 4 \end{array}$$

Keine der beiden ersten Gleichungen ist vor der anderen bevorzugt. Keine kann also der Ausdruck der Regel sein. Die Regel ist ja die allgemeine Anweisung: »wo immer ein Ausdruck steht, in dem 2 vorkommt, da darfst du 2 ersetzen durch 1 + 1 .«

$$\begin{array}{c} f(2) \\ 1 + 1 = 2 \\ \hline f(1+1) \end{array}$$

Jetzt sehen wir, was die Regel eigentlich ist: Sie bezieht sich auf dieses ganze Schema, sie ist nicht ein Teil, etwas Isoliertes daran. Ich muß in die Gleichung »1 + 1 = 2« dieses ganze Schema bereits hineinsehen - erst dann habe ich die Regel vor mir. Die isolierte Gleichung ist noch nicht die Regel.

50. Vgl. TLP 2,03 (F. H.)

aos números individuais, porque, de outra forma, precisaria novamente de uma regra que me diga como posso depreender a formação da série de números a partir da expressão das letras. E se quisesse estabelecer tal regra especificamente em letras, não teria ido mais longe: precisaria de uma nova regra que me dissesse como aplicá-la etc.

A regra não é como argamassa entre dois tijolos.

Não podemos estabelecer uma regra para aplicar outra regra. Não podemos aplicar uma regra "por meio" de uma regra.

Aqui nos deparamos com um erro bizarro, que consiste em pretender que, na lógica, duas coisas podem ser ligadas por uma terceira coisa [que algo é intermediado]. Imagina-se duas coisas que estão conectadas entre si por uma corda. Mas esta é uma imagem enganosa. Pois como a corda se conecta à coisa? [As coisas têm que se conectar diretamente umas às outras sem a corda, ou seja, elas já devem estar conectadas umas à outras como os elos de uma corrente.][50]

É com base nesta falsa concepção que surge a dificuldade de se colocar a pergunta: como se *pode* aplicar a regra? A resposta parece ser: novamente por uma regra, e assim nunca se chegará a lugar nenhum.

Entre a expressão

$$\begin{array}{c} x \\ x^2 \end{array}$$

e a aplicação aos números não se insere novamente uma regra como se fosse a argamassa entre os tijolos, mas já tenho que enxergar por dentro a maneira como a regra é aplicada na expressão. - Agora voltemos à nossa pergunta.

$$\begin{array}{c} 2 + 2 = 4 \\ 1 + 1 = 2 \\ \hline (1+1) + (1+1) = 4 \end{array}$$

Nenhuma das duas primeiras equações tem preferência sobre a outra. Portanto, nenhuma delas pode ser a expressão da regra. A regra é a instrução geral: "Onde quer que haja uma expressão em que 2 ocorra, você pode substituir 2 por 1 + 1."

$$\begin{array}{c} f(2) \\ 1 + 1 = 2 \\ \hline f(1+1) \end{array}$$

Agora vemos o que a regra realmente é: ela se relaciona com todo este esquema, ela não é uma parte, alguma coisa isolada dele. Tenho que já enxergar por dentro todo este esquema na equação "1 + 1 = 2" - só então terei a regra diante de mim. A equação isolada ainda não é a regra.

A analogia com o silogismo pode esclarecer isto.

50. Cf. TLP 2,03 (N. E.)

Die Analogie mit dem Syllogismus kann das verdeutlichen.

$$\begin{array}{l} p \\ p \supset q \\ \hline q \end{array}$$

Auch hier hat man das eine Glied des Syllogismus »p ⊃ q« für den Ausdruck der Schlußregel genommen, natürlich mit Unrecht. Isoliert drückt »p ⊃ q« keineswegs die Schlußregel aus, wohl aber bezogen auf dieses - ein für allemal gegebene - feste Schema. Ich muß mir also »p ⊃ q« immer zu diesem Schema ergänzt denken. »p ⊃ q« hat dieselbe Multiplizität wie das Schema, (ich kann das Schema daraus entnehmen) und darum hat es doch wieder eine gewisse Berechtigung, die Schlußregel auf den Ausdruck »p ⊃ q« zu projizieren.

In derselben Weise kann ich nun die Ersetzungsregel

$$\begin{array}{l} f(2) \\ 1+1=2 \\ \hline f(1+1) \end{array}$$

auf das Glied »1 + 1 = 2« projizieren. Freilich drückt dann diese Gleichung nicht die Regel aus, wohl aber die Gleichung, bezogen auf das gesamte Schema. (Ich muß dann schon in der Gleichung etwas anderes sehen.)

Eine Gleichung ist eine Ersetzungsregel, und zwar wird sie außerhalb der Arithmetik angewendet, in den Sätzen der Umgangssprache. Ich kann sagen: 2 Apfel und 2 Apfel ist dasselbe wie 4 Apfel. Es ist aber klar: Wenn ich *von* Gleichungen spreche, muß eine Ersetzungsregel (Umformungsregel) etwas ganz anderes bedeuten als die Ersetzungsregeln, welche die Gleichungen *selbst* sind.

Daß ich die Regel auf eine Gleichung projizieren kann, liegt daran, daß die Gleichung denselben Charakter hat wie die Regel. Dagegen hat eine Regel des Schachspiels einen anderen Charakter als eine Stellung im Schachspiel. (Es sei denn, wir würden durch die Konfiguration eine Schachregel ausdrücken.)

Eigentlich sollten wir uns verschiedener Sprachen bedienen. Wir sollten einerseits die Gleichung der Arithmetik schreiben »1 + 1 = 2«, andererseits die Regel in Worten aussprechen: »›2‹ darf, wo immer es vorkommt, durch ›1 + 1‹ ersetzt werden«. Und hier fungieren die Worte »darf ersetzt werden« genau in derselben Weise wie das Gleichheitszeichen in der Arithmetik. Sie erfüllen dieselbe Aufgabe. Es ist so, wie wenn ich eine Rechnung, statt sie mit der russischen Rechenmaschine auszuführen, mit Ziffern auf dem Papier ausführe. Ich habe dann mit anderen Mitteln dasselbe gemacht: Ich habe die Rechnung wiederholt.

Daher kommt es, daß »1 + 1 = 2« auch die Regel über die Umformung von Gleichungen abbildet.

Die Regel ist eigentlich die interne Beziehung, die zwischen den Gleichungen :

$$\begin{array}{l} 2+2=4 \\ 1+1=2 \end{array}$$

und der Gleichung

$$(1+1)+(1+1)=4$$

besteht. Als interne Beziehung kann sie nicht durch die Konfiguration des Spiels ausgedrückt werden.

WAISMANN FRAGT WITTGENSTEIN: Versuchen wir, das Gesagte auf das Schachspiel zu

$$\begin{array}{l} p \\ p \supset q \\ \hline q \end{array}$$

Aqui, também, um membro do silogismo “p ⊃ q” foi pego para expressar a regra de inferência, é claro que incorretamente. Isoladamente, “p ⊃ q” de forma alguma expressa a regra de inferência, mas o faz em relação a este esquema fixo - dado de uma vez por todas. Portanto, sempre tenho que pensar em “p ⊃ q” como complementado a este esquema. “p ⊃ q” tem a mesma multiplicidade que o esquema (posso inferir o esquema dele) e é por isto que novamente há uma certa justificativa para projetar a regra de inferência na expressão “p ⊃ q”.

Da mesma forma, agora posso usar a regra de substituição

$$\begin{array}{l} f(2) \\ 1+1=2 \\ \hline f(1+1) \end{array}$$

projetada no elo “1 + 1 = 2”. Admitidamente esta equação não expressa a regra, mas expressa a equação em relação a todo o esquema. (Então, já tenho que ver outra coisa na equação.)

Uma equação é uma regra de substituição particularmente aplicada fora da aritmética, nas proposições da linguagem ordinária. Posso dizer: 2 maçãs e 2 maçãs é o mesmo que 4 maçãs. Mas é claro: quando falo *sobre* equações, uma regra de substituição (regra de conversão) tem que significar algo completamente diferente do que as regras de substituição, que são as *próprias* equações.

O fato de que posso projetar a regra em uma equação é porque a equação tem o mesmo caráter da regra. Em contraste, uma regra do jogo de xadrez tem um caráter diferente de uma posição no jogo de xadrez. (A menos que expressemos uma regra de xadrez por meio da configuração.)

Na verdade, devemos usar linguagens diferentes. Por um lado devemos escrever a equação da aritmética “1 + 1 = 2”, por outro lado devemos expressar a regra em palavras: “Onde quer que ‘2’ ocorra, pode ser substituído por ‘1 + 1’”. E aqui as palavras “pode ser substituído” funcionam exatamente da mesma maneira que o sinal de igualdade na aritmética. Eles fazem o mesmo trabalho. É como fazer um cálculo com dígitos no papel em vez de fazer com a máquina de somar russa. Fiz então a mesma coisa por outros meios: repeti o cálculo.

É por isso que “1 + 1 = 2” também afigura a regra para transformação da equações.

A regra é na verdade a relação interna que existe entre as equações:

$$\begin{array}{l} 2+2=4 \\ 1+1=2 \end{array}$$

e a equação

$$(1+1)+(1+1)=4$$

Como relação interna, ela não pode ser expressa pela configuração do jogo.

übertragen! Auch dort müssen wir sagen: Die Regel des Schachspiels ist nicht der Übergang von einer Stellung der Figuren zu einer anderen. Auch dort müssen wir die Regel in den Übergang der Konfigurationen hineinsehen. Aber hier kommen wir nicht in die Versuchung, dasselbe Gebilde einmal als Konfiguration, das andere Mal als Regel im Spiel aufzufassen. Das muß natürlich einen Grund haben, und ich glaube, dieser hängt mit der Art der Anwendung der Arithmetik zusammen, nämlich damit, daß die Anwendung der Arithmetik eben in Ersetzungsregeln besteht.

WITTGENSTEIN: So ist es auch. Wir könnten aber auch die Regeln über das Ziehen der weißen Figuren durch mögliche Konfigurationen der schwarzen ausdrücken. (?)

Wäre die Gleichung eine Tautologie, so könnte sie nie den Wert einer Ersetzungsregel haben.

Die Gleichung ist eine Ersetzungsregel so wie die Definition.

⟨VERIFIKATION DER SÄTZE DER PHYSIK⟩

SCHLICK WIRFT EINE »SIMPLE FRAGE« AUF: Die Sätze der Physik können doch in bestimmtem Sinn verifiziert werden. Nun kann ein Satz der Physik auf verschiedene Art verifiziert werden. So lassen sich die Maße und die Ladung eines Elektrons auf zwölf oder vierzehn unabhängige Arten bestimmen. Wenn nun der Sinn eines Satzes die Methode seiner Verifikation ist - wie ist das zu verstehen? Wie kann man überhaupt sagen, daß *ein* Satz auf verschiedene Weise verifiziert wird? Ich meine, daß hier die Naturgesetze dasjenige sind, was die verschiedenen Arten der Verifikation verbindet. D. h. auf Grund des naturgesetzlichen Zusammenhanges kann ich einen Satz auf verschiedene Art verifizieren. Wir können ja ein ganz einfaches Beispiel nehmen: Ich messe eine Länge einmal durch Anlegen eines Maßstabes, das andere Mal durch Visieren. An und für sich wäre es ja nicht notwendig, daß die beiden Resultate übereinstimmen. Wenn sie es doch tun, dann äußert sich darin ein Naturgesetz. (?) Inwiefern habe ich nun in beiden Fällen »dasselbe« festgestellt?

WITTGENSTEIN: Einen Moment! Das kommt ja nicht nur in der Wissenschaft vor, sondern auch im täglichen Leben. Ich höre z. B. im Zimmer nebenan Klavierspielen und sage: »Mein Bruder ist drinnen.«[51] Wenn man mich nun fragt, woher ich das weiß, so könnte ich antworten: »Er hat es mir gesagt, daß er um die Zeit im Nebenzimmer sein werde.« Oder: »Ich höre Klavierspielen und erkenne daran seine Art.« Oder: »Ich habe vorhin einen Schritt gehört, der ganz so war wie der seine«, etc. Es scheint nun, daß ich denselben Satz auf immer verschiedene Weise verifiziert habe. Aber so ist es nicht. Was ich verifiziert habe, sind verschiedene »Symptome« für etwas anderes. (»Symptome« habe ich sie in meinem Manuskript[52] genannt.) Das Klavierspielen, der Schritt etc. sind Symptome für die Anwesenheit meines Bruders.

Hypothesen II

Ich glaube, es ist sehr wichtig und wird die Sache gleich klar machen, wenn ich daran erinnere, daß die Gleichungen der Physik keine Sätze sind, sondern *Hypothesen*. Was wir beobachten,

51. Wittgenstein denkt an seinen Bruder, der tatsächlich Pianist war. (F. H.)

52. Auf diese Lehre wird in PhB hingewiesen; s. S. 200 u. 283. (F. H.)

WAISMANN PERGUNTA A WITTGENSTEIN: Vamos tentar transferir o que dissemos para o jogo de xadrez! Também aí temos que dizer: a regra do jogo de xadrez não é a passagem de uma posição das peças para outra. Lá também temos que enxergar a regra por dentro na passagem das configurações. Mas aqui não somos tentados a conceber no jogo a mesma estrutura uma vez como uma configuração e a outra vez como regra. É claro que tem que haver uma razão para isto, e acho que tem a ver com a maneira como a aritmética é aplicada, a saber, que a aplicação da aritmética consiste em regras de substituição.

WITTGENSTEIN: É assim mesmo. Mas também poderíamos expressar as regras sobre como mover as peças brancas por meio de configurações possíveis das peças pretas. (?)

Se a equação fosse uma tautologia, ela nunca poderia ter o valor de uma regra de substituição.

A equação é uma regra de substituição tal como o é a definição.

⟨VERIFICAÇÃO DAS PROPOSIÇÕES DA FÍSICA⟩

SCHLICK FORMULA UMA “PERGUNTA SIMPLES”: pode-se dizer que as proposições da física podem ser verificadas em certo sentido. Agora, uma proposição da física pode ser verificado de várias maneiras. Assim, a massa e a carga de um elétron podem ser determinadas de doze ou quatorze maneiras independentes. Agora, se o sentido de uma proposição é o método de sua verificação - como isto deve ser compreendido? Como se pode afinal dizer que *uma* proposição é verificada de maneiras diferentes? Acho que aqui as leis da natureza são o que conecta os vários tipos de verificação. Ou seja, com base no contexto da lei natural, posso verificar uma proposição de várias maneiras. Tomemos um exemplo muito simples: em um momento, eu meço uma extensão mediante uma régua, da outra vez com um aparelho de visualização. Por si só, não seria necessário que os dois resultados concordassem. Se o fizerem, então uma lei natural se expressa por ali. (?) Até que ponto estabeleci “o mesmo” em ambos os casos?

WITTGENSTEIN: Só um momento! Isso não acontece apenas na ciência, mas também na vida cotidiana. Eu ouço, por exemplo, tocar piano na sala ao lado e digo: “Meu irmão está lá dentro”.[51] Se alguém me perguntasse como sei disto, eu poderia responder: “Ele me disse que estaria na sala ao lado naquela hora.” Ou: “Eu ouço o piano tocando e reconheço o seu modo de tocar.” Ou: “Acabei de ouvir passos que eram totalmente iguais aos dele” etc. Agora parece que eu verifiquei a mesma proposição de maneiras diferentes. Mas não é assim. O que verifiquei são vários “sintomas” de outra coisa. (Eu os chamei de “sintomas” no meu manuscrito.)[52] Tocar piano, andar etc. são sintomas da presença do meu irmão.

Hipóteses II

Acho que é muito importante, e deixarei as coisas claras em um momento, quando lhes lembrar que as equações da física não são proposições, mas *hipóteses*. O que observamos são, por as-

51. Wittgenstein pensa no seu irmão que, de fato, era pianista. (N. E.)

52. Esta doutrina é aludida nas PR, pp. 200 e 283. (N. E.)

sind gleichsam die einzelnen »Schnitte« durch die Hypothesen, und zwar wesentlich verschiedene Schnitte, d. h. nicht nur Schnitte zu verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten, sondern Schnitte von verschiedener logischer Form, also gänzlich verschiedene Tatsachen. Was wir verifizieren können, ist immer nur *ein* solcher Schnitt. Die Hypothese ist dasjenige, was alle diese verschiedenen Schnitte miteinander verbindet (so wie eine Kurve verschiedene Punkte verbindet). In den Fällen nun, wo es aussieht als hätten wir denselben Satz auf verschiedene Art verifiziert, haben wir in Wirklichkeit verschiedene Schnitte derselben Hypothese verifiziert.

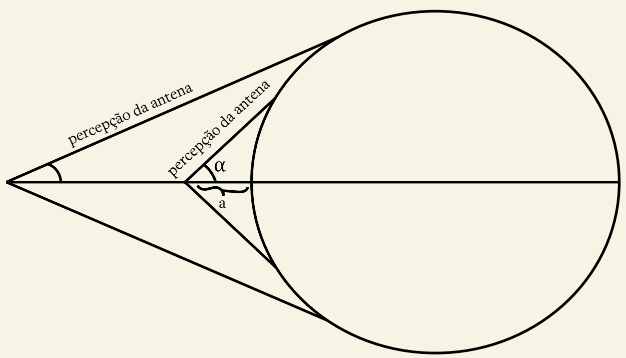
Die Hypothese hat immer verschiedene Seiten oder verschiedene Schnitte, so wie ein dreidimensionaler Körper, der auf verschiedene Weisen projiziert werden kann. Für die Beantwortung Ihrer Frage ist es nun sehr wesentlich, daß es sich in allen diesen Beispielen immer um *Hypothesen* handelt.

Ich will die Sache durch ein Beispiel erläutern. Denken Sie sich ein Geschöpf, das einen Sinn hätte, mit welchem es Winkel messen kann, wie wir mit unserem Auge, [das ferner Entfernungen messen kann,] und das außerdem zwei Fühler besäße, mit denen es abtastet.

Gesetzt nun, dieser Organismus sammelt gewisse Erfahrungen, gewinnt etwa gewisse Maßzahlen, notiert Sätze und trägt sie zu Hause in ein KS (Koordinatensystem) ein. Es würde nun diese Erfahrungen so beschreiben können, daß es sagt : »*Eine Kugel hat sich auf mich zu bewegt.*«[53]

Denken wir uns, daß die Erfahrungen mit den Fühlern wegfallen, so könnten wir das ganze auch zweidimensional beschreiben: ein Kreis im Gesichtsfeld, der sich nähert. Wir könnten nun auch dort, wo die Erfahrungen mit den Fühlern fehlen, es vorziehen, die Erfahrung mittels der Hypothese der Kugel darzustellen.

Wir führen dann in der Hypothese *mehr* mit, als durch die Aufgabe der Beschreibung der unmittelbaren Erfahrung gefordert wird. Die Hypothese hat gleichsam ein leerlaufendes Rad: Solange keine weiteren Erfahrungen auftreten, bleibt das Rad unbenützt, und es tritt erst in Aktion, sobald es gilt, weitere Erfahrungen miteinzubeziehen. (E s ist wie mit einem Differentialgetriebe: Dadurch, daß ich ein Rad drehe, entsteht eine ganz bestimmte Bewegung.)



Unsere Hypothese ist also auf *mehr* berechnet als auf die Wiedergabe dieser einen Erfahrungsart (z. B. der Winkelmessungen und Entfernungsmessungen, ohne die Erfahrung der Fühler). Was leistet nun diese Hypothese? Wenn wir die Erfahrung machen, daß uns der Kreis näher kommt, so würden wir sagen: Wir erwarten nunmehr auch eine ganz bestimmte Erfahrung anderer Art machen zu können.

53. Es ist interessant zu bemerken, dass diese Illustration, die Wittgenstein 1931 erstellte, in der Praxis fast die Funktionsweise einer künstlichen Intelligenz ist. (A. U.)

sim dizer, os "cortes" individuais através das hipóteses, particularmente cortes essencialmente diferentes, ou seja, não apenas cortes para diferentes lugares e tempos, mas cortes de diferentes formas lógicas, portanto fatos completamente diferentes. O que podemos verificar é sempre apenas *um* desses cortes. A hipótese é o que conecta todos esses diferentes cortes (como uma curva conecta diferentes pontos). Agora, nos casos em que parece que verificamos a mesma proposição de maneiras diferentes, na verdade verificamos diferentes cortes da mesma hipótese.

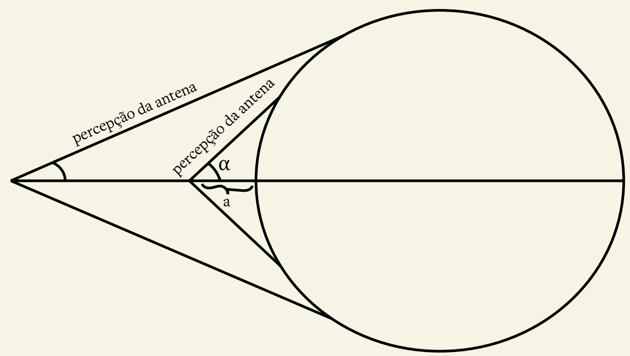
A hipótese sempre tem lados ou cortes diferentes, como um corpo tridimensional que pode ser projetado de maneiras diferentes. Para responder à sua pergunta, é muito importante que em todos esses exemplos tratemos sempre de *hipóteses*.

Vou elucidar o assunto por meio de um exemplo. Imagine uma criatura que tivesse um sentido com o qual pudesse medir ângulos como fazemos com nossos olhos [que podem medir distâncias mais afastadas] e que também tivesse duas antenas para sentir.

Vamos agora assumir que este organismo coleta certas experiências, obtém certas medidas, anota proposições e as insere em casa em um SC (sistema de coordenadas). Agora, ele seria capaz de descrever essas experiências de uma maneira que diga: "*Uma esfera se moveu em minha direção*."[53]

Se pensarmos que a experiência das criaturas de antenas vai desaparecer, poderíamos também descrever tudo em duas dimensões: um círculo no campo de visão que se aproxima. Nos lugares onde falta a experiência das criaturas de antenas, podemos preferir representar a experiência por meio da hipótese da esfera.

Então carregamos *mais* com a hipótese do que o exigido pela tarefa de descrever a experiência imediata. A hipótese tem, por assim dizer, uma roda-livre: enquanto não ocorrem mais experiências, a roda permanece sem uso e só entra em ação quando é necessário incluir novas experiências. (É como uma engrenagem diferencial: o fato de eu girar uma roda cria um movimento muito específico.)



Nossa hipótese é, portanto, *mais* calculada do que a reprodução deste tipo de experiência (por exemplo, medidas de ângulo e medidas de distância sem a experiência da percepção da antena). O que esta hipótese realiza agora? Se tivéssemos a experiência de que o círculo está se aproximando de nós, diríamos: doravante esperamos poder ter uma experiência bem específica de um tipo diferente.

53. É interessante observar que esta ilustração que Wittgenstein elabora em 1931, na prática quase que descreve o modo de funcionamento de uma inteligência artificial. (N. T.)

Die Hypothesen der Physik sind so gebaut, daß sie eine sehr große Anzahl von Erfahrungen verschiedener Art miteinander in Beziehung setzen. Dieses Verbindende ist die Hypothese.

Das allgemeine Prinzip dabei ist dieses:

Was auf verschiedene Art verifiziert wird, ist mehr, als was auf eine Art verifiziert wird.

D. h., wenn wir sagen, wir haben »dasselbe« auf zwei verschiedene Arten verifiziert, so bedeutet »dasselbe« mehr als das, was nur auf eine Art verifiziert wird.

Natürlich habe ich durch jede einzelne Beobachtung etwas anderes verifiziert. Und es besteht ja auch gar keine logische Notwendigkeit, warum mit der Verifikation eines Satzes auch ein anderer verifiziert sein sollte. Ich kann mir z. B. recht wohl denken, daß ich die Hyazinthe da sehe, aber daß ich keine Tastwahrnehmungen hätte, wenn ich sie berühren wollte, oder daß ich beim Anlegen eines Maßstabes einen anderen Wert für die Länge bekomme als beim Visieren. Die Phänomene sind eben verschiedene »Facetten«, die durch die Hypothese verbunden werden.

WAISMANN FRAGT WITTGENSTEIN: Ich habe die Sache immer so aufgefaßt: Wenn ich eine Strecke AB messen soll, so kann ich entweder AB mittels eines Maßstabes ausmessen, oder ich kann von einem dritten Punkt C aus nach A und B visieren, die Strecken AC und BC messen und AB mittels des Cosinussatzes berechnen. Habe ich nun die Aussage: »Die Strecke AB ist so und so lang« auf verschiedene Art verifiziert? Das kommt ganz darauf an, was man unter »Messen« verstehen will. Verstehe ich unter »Messen« den Vorgang des wiederholten Anlegens der Maßstäbe, des Visierens, des Feststellens der Koinzidenz etc ., dann habe ich zwei verschiedene Berichte vor mir und es ist Sache der Erfahrung, ob die Resultate übereinstimmen. Anders ist es dagegen, wenn ich die Axiome der euklidischen Geometrie zugrunde lege, wenn ich also die Ergebnisse der Messung beschreibe mit einer Sprache, deren Syntax festliegt. Wenn in diesem Falle eine Abweichung auftritt - würde ich sagen, der Cosinussatz ist falsch, die euklidische Geometrie ist widerlegt? Nein! Wir würden an der euklidischen Geometrie festhalten und den Grund für die Abweichung im physikalischen Verhalten unserer Maßstäbe suchen. Wir würden sagen: Der Maßstab hat sich deformiert, es ist ein Kraftfeld aufgetreten, unsere Messung war ungenau, der Lichtstrahl war gekrümmt etc. Das heißt: Wir fassen die Sätze der Geometrie als Regeln der Syntax auf. Eine Regel der Syntax bestimmt, wann zwei Methoden der Verifikation äquivalent sind.

WITTGENSTEIN: Wenn ich unter »Raum« den Gesichtsraum verstehe, dann ist die Geometrie die Grammatik der Worte, mit welchen ich die Phänomene beschreibe.

Wenn ich aber unter »Raum« den physikalischen Raum verstehe, dann ist die Geometrie, geradeso wie die Physik, eine Hypothese; sie bezieht sich auf die Erfahrungen des Messens.

⟨*Geometrie als Syntax III*⟩

WAISMANN: Sie sagten seinerzeit, vor einem Jahr, als Sie uns diese Dinge erklärten, daß die Geometrie Syntax sei. Einstein hat gesagt: Die Geometrie beschreibt die Lagerungsmöglichkeiten der starren Körper.[54]

Wenn die tatsächlichen Lagerungen der starren Körper durch die Sätze einer Sprache beschrieben werden, dann kann den Lagerungsmöglichkeiten nur die *Syntax* dieser Sprache ents-

54. Siehe oben, S. 9 u. Anm. u. S. 39. (F. H.)

As hipóteses da física são construídas de tal forma que relacionam um grande número de experiências de vários tipos entre si. Esta conexão é a hipótese.

O princípio geral é o seguinte:

O que é verificado de maneiras diferentes é mais do que o que é verificado de uma só maneira.

Isto é, quando dizemos que verificamos “o mesmo” de duas maneiras diferentes, “o mesmo” significa mais do que o que é verificado de apenas uma maneira.

Claro, com cada observação individual eu verifiquei algo diferente. E também não há necessidade lógica de que a verificação de uma proposição também deva verificar a outra. Eu posso, por exemplo, com todo o direito imaginar que vejo o jacinto ali, mas que não teria percepção tátil se quisesse tocá-lo, ou que obtenho um valor diferente para o comprimento ao usar uma régua do que ao visualizá-lo. Os fenômenos são justamente diferentes “facetas” conectadas pela hipótese.

WAISMANN PERGUNTA A WITTGENSTEIN: eu sempre concebi a questão desta forma: Se devo medir uma distância AB, posso medir AB usando uma régua ou posso visualizar em A e B, a partir de um terceiro ponto C, e medir as distâncias AC e BC, calculando AB mediante o cosseno. Agora tenho o enunciado: “O segmento AB tem tanto e tanto de comprimento” foi verificado de maneiras diferentes? Tudo depende do que se compreende por “medição”. Se por “medição” compreendo o processo de aplicar repetidamente os parâmetros, as visualizações, as determinações de coincidência etc., então tenho dois informes diferentes diante de mim e é uma questão empírica se os resultados concordam. Por outro lado, é diferente quando coloco os axiomas da geometria euclidiana como base, ou seja, quando descrevo os resultados da medição em uma linguagem cuja sintaxe é fixa. Se, neste caso, ocorrer um desvio - eu diria que o cosseno está errado, que a geometria euclidiana foi refutada? Não! Nos apegaríamos à geometria euclidiana e buscaríamos o motivo do desvio no comportamento físico dos nossos padrões. Nós diríamos: a escala se deformou, apareceu um campo de força, nossa medição foi imprecisa, o feixe de luz foi curvo etc. O que significa: concebemos as proposições da geometria como regras da sintaxe. Uma regra da sintaxe determina quando dois métodos de verificação são equivalentes.

WITTGENSTEIN: se por “espaço” compreendo o espaço visual, então a geometria é a gramática das palavras com as quais descrevo os fenômenos.

Mas se por “espaço” me refiro ao espaço físico, então a geometria, assim como a física, é uma hipótese; relaciona-se com a experiência de medição.

⟨*Geometria como Sintaxe III*⟩

WAISMANN: há um ano atrás, você disse, quando explicou naquela altura estas questões para nós, que geometria era uma sintaxe. Einstein disse: a geometria descreve as possibilidades de posição dos corpos rígidos.[54]

Se as posições reais dos corpos rígidos são descritas pelas proposições de uma linguagem, então apenas a *sintaxe* desta linguagem pode corresponder às posições possíveis. Até que ponto

54. Ver, acima, p. 10 e nota de rodapé, e p. 40. (N. E.)

prechen. Inwiefern können wir dann die Geometrie als Hypothese auffassen? Inwiefern können wir z.B. die Dreidimensionalität des Raumes als eine Hypothese auffassen?

WITTGENSTEIN: Die Geometrie ist nichts Selbständiges, sie wird ergänzt durch die Physik. Sie ist also *Teil* einer Hypothese. Diesen Teil kann ich festlegen, indem ich mir vorbehalte, alles übrige so einzurichten, daß ich Übereinstimmung erhalte mit der Erfahrung. Einen solchen von vornherein festgelegten Teil der Hypothese nenne ich ein *Postulat*.

Wir können nur eines in der Welt postulieren: das ist unsere Ausdrucksweise. Das Verhalten der Tatsachen können wir nicht postulieren. Ich kann also auch sagen: Wenn ich ein Postulat aufstelle, so lege ich damit die Syntax fest, in der ich die Hypothese ausdrücke. Ich wähle ein Darstellungssystem. Es besteht also gar kein Gegensatz zwischen der Auffassung der Geometrie als Teil einer Hypothese und der Auffassung der Geometrie als Syntax. Auch die Dreidimensionalität kann ich als Hypothese auffassen. Würde ich sie ändern, so müßte das jedenfalls seinen Ersatz darin finden, daß sich irgendwo anders etwas ändert. Irgendetwas muß ich anders deuten.

Was hier abgezogen·wird, muß irgendwo anders wieder erscheinen.

NACHTRÄGE[55]

Schach[56]

Die *Bedeutung* des Schachspiels ist das, was alle Schachspiele miteinander gemein haben.

So wenig es in der Mathematik auf die Tintenstriche ankommt, so wenig kommt es im Schachspiel auf das Aussehen der Figuren an. Würde es im Schachspiel Eindruck auf den Gegner machen, wenn ich sage: »Ich habe eine furchtbare Königin, mit glühenden Augen« etc.?

Spiel und Erkenntnis unterscheiden sich nur durch ihre Anwendung. Wenn auf dem Mars die Menschen so Krieg führten, wie wir Schach spielen, so würden die Regeln des Schachspiels sofort eine ernsthafte Bedeutung gewinnen und der Generalstab würde sich mit dem Schachspiel ebenso beschäftigen, wie jetzt mit der Landkarte.

Zu Königsberg[57]

Was bedeutet eine mathematische Frage?

Es sieht heute so aus, als würden in einem Lehrbuch der Mathematik zwei gänzlich verschiedene Elemente vorkommen: Kalkül und etwas, das so aussieht, als würde es die Rechtfertigung für den Kalkül enthalten. Aber das zweite verschwindet, sobald wir zum Kalkül kommen. Was verschwindet, ist die scheinbare Beschreibung.[58]

55. Aus dem dritten dieser Nachträge ist es klar, daß sie von Wittgenstein und nicht von Waismann herrühren. Vielleicht enthalten sie, was Wittgenstein gesagt hat, als Waismann ihn über vorher diskutierte Punkte befragte. (F. H.)

56. Eine Wiederholung, ohne wesentliche Änderungen, von S. 115 (ein Teil von Wittgensteins Diskussion über »Was in Königsberg zu sagen wäre«). (F. H.)

57. Sieben Paragraphen, die wörtlich den ersten Teil von »Was in Königsberg zu sagen wäre« (s. oben, S. 115 ff.) wiederholen, sind hier nicht gedruckt. (F. H.)

58. In der *Logisch-Philosophische Abhandlung* nennt Wittgenstein die Sätze der Mathematik Scheinsätze (vgl. TLP 5.534-5.535; 6.2) und weist darauf hin, dass sie scheinbar nichts bezeichnen, da sie nur Operatoren sind. In dem hier bespro-

podemos conceber a geometria como uma hipótese? Em que medida podemos, por exemplo, conceber a tridimensionalidade do espaço como uma hipótese?

WITTGENSTEIN: a geometria não é algo independente, é complementada pela física. Portanto, faz *parte* de uma hipótese. Posso estabelecer esta parte reservando-me o direito de organizar tudo o mais de forma que alcance concordância com a experiência. Eu chamo essa parte pré-determinada da hipótese de postulado.

Só podemos postular uma coisa no mundo: a nossa forma de expressão. O processo dos fatos não podemos postular. Portanto, também posso dizer: quando faço um postulado, fixo a sintaxe com a qual expresso a hipótese. Eu escolho um sistema de apresentação. Portanto, não há nenhuma contradição entre a concepção da geometria como parte de uma hipótese e a concepção da geometria como sintaxe. Também posso conceber a tridimensionalidade como hipótese. Se eu fosse mudá-la, ela teria de encontrar seu substituto no fato de que algo mais muda. Tenho que interpretar algo diferente.

O que é retirado aqui deve aparecer novamente em outro lugar.

ADENDOS[55]

Xadrez[56]

O *significado* do jogo de xadrez é o que todos os jogos de xadrez têm em comum.

Da mesma forma que os traços de tinta não são importantes na matemática, assim também ocorre com a aparência das peças no jogo de xadrez. No jogo de xadrez, impressionaria meu oponente se eu dissesse: “Eu tenho uma rainha terrível, com olhos flamejantes” etc.?

Jogo e conhecimento diferem apenas em sua aplicação. Se as pessoas travassem uma guerra em Marte como nós jogamos xadrez, as regras do jogo de xadrez assumiriam imediatamente uma importância séria e o estado-maior geral lidaria com o jogo de xadrez como o faz com o mapa agora.

Para Königsberg[57]

O que significa uma questão de matemática?

Hoje em dia parece que dois elementos completamente diferentes ocorrem em um compêndio de matemática: cálculo e algo que parece conter a justificativa para o cálculo. Mas o segundo desaparece assim que chegamos ao cálculo. O que desaparece é a descrição aparente.[58]

55. A partir do terceiro destes adendos, fica claro que eles vêm de Wittgenstein e não de Waismann. Talvez eles contenham o que Wittgenstein disse quando Waismann perguntou a ele sobre pontos discutidos anteriormente. (N. E.)

56. Uma repetição sem modificações essenciais da p. 116 (uma parta das discussões de Wittgenstein sobre “O Que Dizer em Königsberg”). (N. E.)

57. Sete parágrafos que repetem literalmente a primeira parte de “O Que Dizer em Königsberg” (ver, acima, p. 116ss), não são impressas aqui. (N. E.)

58. No *Tractatus*, Wittgenstein chama as proposições da matemática de *Scheinsätze* (proposições aparentes ou pseudoproposições; cf. TLP 5,534-5,535; 6,2), indicando que, embora assim o pareça, elas nada designam, pois são somente operadores. No caso aqui discutido, há uma justificativa, ou uma prosa, ao redor do cálculo que, do mesmo modo, é

Es kommt bei einer Maschine nur darauf an, daß die Räder ineinandergreifen, aber nicht auf den Farbanstrich. So auch in der Mengenlehre. Das Wort »unendlich« ist ebenso unwesentlich wie der Farbanstrich bei einem Rad. Wesentlich ist nur der Kalkül.

Definition der Zahl[59]

Ich habe meinen Hörern in Cambridge die Sache so erklärt: Denken Sie sich, ich habe ein Dutzend Tassen. Ich möchte Ihnen nun mitteilen, daß ich ebenso viele Löffel habe. Wie kann ich das tun?

Wenn ich sagen wollte, ich habe die Löffel über die Tassen verteilt, so habe ich nicht das ausgedrückt, was ich meine, wenn ich sage, daß ich ebenso viele Löffel wie Tassen habe. Ich werde also besser sagen: Ich *kann* die Löffel über die Tassen verteilen. Was heißt hier das Wort »kann«? Meine ich es im physischen Sinne, meine ich also, ich habe die physische Kraft, die Löffel über die Tassen zu verteilen, so würden Sie mir sagen: Das wissen wir schon, daß du das kannst. Was ich meine, ist offenbar: Ich kann die Löffel verteilen, weil die Löffel in der richtigen Anzahl da sind. Aber um das zu erklären, muß ich ja den Begriff der Zahl schon voraussetzen. Nicht: die Zuordnung bestimmt die Zahl, sondern die Zahl ermöglicht die Zuordnung. Deshalb kann man die Zahl nicht durch die Zuordnung erklären (Gleichzahligkeit). Man darf die Zahl nicht durch die Zuordnung erklären, sondern durch die Möglichkeit der Zuordnung, und diese setzt gerade die Zahl voraus.

Man kann den Zahlbegriff nicht auf die Zuordnung stützen. Frege hat einmal gesagt: »Die Gerade ist schon gezogen, bevor sie gezogen wird.«[60] Dieser Ausspruch klingt sehr paradox. Er hängt mit Freges Unterscheidung von »objektiv« und »wirklich«[61] zusammen.

Was Frege meint, ist offenbar dies: Es ist möglich, die Gerade zu ziehen. Aber die Möglichkeit ist noch nicht die Wirklichkeit. Erst wenn die Gerade gezogen wird, ist sie gezogen. Und so verhält es sich auch mit der Zahl: Wenn Frege und Russell die Zahl durch Zuordnung definieren wollen, so muß man sagen:

Erst wenn die Zuordnung *hergestellt* ist, besteht sie. Frege meinte: Wenn zwei Mengen gleichviel Elemente haben, dann ist auch schon eine Zuordnung da. (So wie: wenn zwei Punkte gegeben sind, dann ist auch schon eine sie verbindende Gerade da). Keine Spur! Die Zuordnung ist erst da, sobald ich die Mengen wirklich einander zuordne, d. h., sobald ich eine bestimmte Beziehung angebe. Meint man aber in diesem ganzen Gedankengang die *Möglichkeit* der Zuordnung, dann setzt diese ja gerade den Begriff der Anzahl voraus. Es bedeutet also in keinem Fall einen Gewinn, die Zahl auf die Zuordnung gründen zu wollen.

Wenn Russell Farbe bekennt, so muß er unter Zuordnung etwas verstehen, das durch eine *Liste* gegeben wird. Russell meinte, daß es immer eine Zuordnung gebe, nämlich die durch Iden-

chenen Fall gibt es eine Rechtfertigung oder Prosa um das Kalkül, das ebenfalls nur eine leere Äußerlichkeit ist. (A. U.)

59. Die Ideen in diesem Nachtrag scheinen neu zu sein, soweit es sich um die Wiener Konversationen handelt. Waismann schrieb mehrere Auslegungen dieses Arguments; die letzte, mit einem Dank an Wittgenstein erschien in *Einführung in das mathematische Denken*, Wien, 1947, S. 77-80 (vgl. S. 168). (F. H.)

60. Vgl. *Grundgesetze der Arithmetik* I, Jena, 1893, S. 88, wo Frege meint, daß wir, wenn wir zwei Begriffe einander zuordnen, etwas Ähnliches tun, wie wenn wir in der Geometrie eine Hilfslinie ziehen. Solches Ziehen ist nichts weniger als ein Schaffen. »Wir bringen uns vielmehr . . . nur zum Bewußtsein, fassen nur auf, was schon da war.« (Diesen Hinweis verdanke ich Herrn Prof. P. T. Geach.) (F. H.)

61. Z.B. *Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884, S. 35. (F. H.)

A única coisa que importa em uma máquina é que as rodas se encaixem, não a pintura. O mesmo ocorre na teoria dos conjuntos. A palavra “infinito” é tão insignificante quanto a tinta em uma roda. Apenas o cálculo é essencial.

Definição de Número[59]

Expliquei aos meus ouvintes em Cambridge assim: imagine que tenho uma dúzia de xícaras. Gostaria agora de informar que tenho a mesma quantidade de colheres. Como posso fazer isto?

Se quis dizer que reparti as colheres entre as xícaras, não expressei o que quero dizer quando digo que tenho tantas colheres quanto xícaras. Seria, então, melhor para mim dizer: *posso* repartir as colheres entre as xícaras. O que a palavra “pode” significa aqui? Quero dizê-la no sentido físico, quero dizer, portanto, que tenho força física para repartir as colheres entre as xícaras, e então você me diria: já sabemos que você pode fazê-lo. O que quero dizer é obviamente: posso repartir as colheres porque há o número certo de colheres. Mas para explicar isto já tenho que pressupor o conceito de número. Não é o caso de que a correlação determine o número, mas que o número possibilite a correlação. Portanto, não se pode explicar o número pela correlação (equinumerosidade). Não se deve explicar o número não pela correlação, mas sim pela possibilidade de correlação, e isto pressupõe precisamente o número.

Não se pode basear o conceito de número na correlação. Frege disse certa vez: “A linha reta é traçada antes de ser traçada.”[60] Esta máxima soa como muito paradoxal. Está relacionada à distinção de Frege entre “objetivo” e “real”.[61]

O que Frege obviamente quer dizer é o seguinte: é possível traçar a linha reta. Mas a possibilidade ainda não é a realidade. A reta só é desenhada quando é desenhada. E assim é com o número: se Frege e Russell quiserem definir o número por correlação, tem-se que dizer assim:

Somente quando a correlação é *estabelecida* é que ela existe. Frege pensou que se dois conjuntos têm o mesmo número de elementos, então já existe uma correlação. (Do mesmo modo que: se dois pontos são dados, então já existe uma linha reta conectando-os). Nada disso! A correlação só estará lá assim que eu realmente correlacionar os conjuntos um ao outro, isto é, assim que eu especificar um determinado relacionamento. Mas se o que se quer dizer em toda essa linha de raciocínio é a *possibilidade* de correlação, então já se pressupõe precisamente o conceito de número. Portanto, não significa de nenhum modo um ganho querer fundamentar o número na correlação.

Se Russell abrir o jogo, então ele tem que compreender por correlação algo que é fornecido por uma *lista*. Russell deu a entender que sempre havia uma correlação, ou seja, a de identidade.[62](?) Mas se a identidade cair, não sobra mais nada.

somente uma exterioridade vazia. (N. T.)

59. As idéias neste adendo parecem ser novas no que diz respeito às conversas de Viena. Waismann escreveu várias interpretações deste argumento; o último, com agradecimentos a Wittgenstein, apareceu em *Einführung in das mathematische Denken*, Viena, 1947, pp. 77-80 (cf. p. 168). (N. E.)

60. Cf. *Grundgesetze der Arithmetik* I, Jena, 1893, p. 88, onde Frege pensa que quando atribuímos dois conceitos um ao outro, fazemos algo semelhante a quando desenhamos uma linha auxiliar na geometria. Este desenho é muito menos do que criar. “Em vez disto, nós só trazemos. . . para a consciência, só apreendemos, o que já estava lá.” (Devo esta indicação ao Prof. P. T. Geach.) (N. E.)

61. Por exemplo, *Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884, p. 35. (N. E.)

62. Se duas listas iguais (é claro, finitas) forem fornecidas, será possível criar uma associação entre elas por meio do relacionamento de identidade. Foi precisamente esta observação que não consegui encontrar nas obras de Russell. Mas

tität.[62] (?) Wenn aber die Identität fällt, so bleibt nichts übrig.

62. Wenn zwei (natürlich endliche) gleichzahlige Listen gegeben sind, dann kann man mittels der Identität-Beziehung eine Zuordnung zwischen ihnen schaffen. Gerade diese Bemerkung habe ich in den Werken Russells nicht finden können. Vgl. aber S. 283 Anm. unten. (F. H.)

veja a nota na página 284 abaixo. (N. E.)

TEIL V

Montag, 21. September 1931 (*Argentinierstraße, dann* ⟨*auf der*⟩ *Straße*)[1]

WITTGENSTEIN zeigt Waismann sein Manuskript in Maschinschriftblättern und macht Bemerkungen über die Zeichen.[2,3] Ein Wort das so unterstrichen ist: - - - bedeutet: Wittgenstein ist sich im Zweifel, ob es stehen bleiben soll oder nicht.[4] Es wäre ihm zwar recht, ein anderes Wort zu setzen; aber aus irgendeinem dunklen Gefühl hat er gerade dieses Wort gewählt, obwohl dadurch manchmal ein schreckliches Deutsch zustande kommt. Die Sätze sind ganz kunterbunt. Sie sind für Wittgenstein bestimmt, der sie nach England mitnimmt, um dort weiter daran zu arbeiten. Sie sind ein Extrakt aus den Manuskriptbüchern (bisher 90 Seiten.)

INTENTION, MEINEN, BEDEUTEN

WAISMANN liest zufällig den Satz:
»Hast du, als du das sagtest, auch an Napoleon gedacht?«
»Ich habe an das gedacht, was ich sagte.«[5,6]

WAISMANN FRAGT WITTGENSTEIN: Heißt das, ob ein Satz über das, was er sagt, hinausgreift und noch andere Dinge berührt?

WITTGENSTEIN: Ich will Ihnen das erklären. Ich beschäftige mich in dieser Arbeit immer wieder mit der Frage, was es heißt: einen Satz *verstehen*. Das hängt mit der allgemeinen Frage zusammen, was das ist, was man *Intention, Meinen, Bedeuten* nennt. Die gewöhnliche Ansicht

1. Das Stadthaus der Familie Wittgenstein; zu dieser Zeit von Wittgensteins ältester Schwester Hermine und seinem Bruder Paul bewohnt. Wahrscheinlich war Schlick bei dieser Gelegenheit nicht anwesend, sondern war schon nach Amerika abgefahren. (F. H.)

2. Sehr wahrscheinlich die ersten Seiten von EM, wo viele Themen dieses Gesprächs erörtert werden. (F. H.)

3. Was McGuinness, der Herausgeber dieses Textes, unter dem Akronym *EM* klassifiziert, ist ein Satz von fünf Manuskripten, die zwischen 1930 und 1931 entstanden sind (vgl. www.wittgensteinsource.org). *EM* entspricht MSS 109, 110, 111, 112 und 113. Das diesen Manuskripten entsprechende Typoskript, mit dem wahrscheinlich gleichzeitig begonnen wurde, ist TS 211, nach die Klassifikation nach von Wright. Auf den ersten Seiten von TS 221 werden Zeichen, Regeln und Sprache besprochen, und tatsächlich gibt es mehrere Wörter und Ausdrücke, die in unterbrochenen Strichen unterstrichen sind, wie Waismann mitteilt. Es ist sehr interessant, dass Waismann in Wittgensteins Schrift „ein schreckliches Deutsch“ wahrnimmt, als ob es noch eine Reihe von sprachlichen Formulierungen wäre, die in Zukunft in einen Text umgewandelt werden sollen, der zu aufklärenden Zwecken mehr mit Sätzen, Adjektiven, Adverbien und Redewendungen verziert ist. Heute wissen wir jedoch, dass Wittgenstein seine Schriften in späteren Typoskripten nicht so poliert und verfeinert hat, sondern in die entgegengesetzte Richtung von großer Verdichtung, extremer Sparsamkeit und, sagen wir, Esoterik. Damit sein Text für den noch unwissenden Leser nicht verständlich ist, wie und warum der Autor diese philosophischen Themen so eigenwillig behandelt. (A. U.)

4. Das war Wittgensteins übliches Verfahren. (F. H.)

5. Die Stelle kommt ungefähr in Wittgensteins MS Bd. VII (1931), in EM S.17 und später in PhGr. § 53 vor. (F. H.)

6. In von Wrights Klassifikation entsprechen McGuinness-Informationen MS 111, S. 26, und TS 211, p. 17. (A. U.)

PARTE V

Segunda-feira, 21 de Setembro de 1931 (*Argentinierstraße, depois* ⟨*na*⟩ *rua*)[1]

WITTGENSTEIN mostra a Waismann seu manuscrito em folhas datilografadas e faz observações sobre os sinais.[2,3] Uma palavra sublinhada assim: - - - significa: Wittgenstein está em dúvida se deve mantê-la ou não.[4] Ainda que fosse correto para ele colocar outra palavra; no entanto, por causa de algum vago sentimento, ele escolheu precisamente esta palavra, embora às vezes isto crie um alemão terrível. As sentenças são muito bagunçadas. São destinadas a Wittgenstein, que as leva para a Inglaterra para continuar trabalhando nelas. São um extrato dos livros manuscritos (90 páginas até agora).

INTENÇÃO, QUERER DIZER, SIGNIFICAR

WAISMANN aleatoriamente lê a frase:
“Quando você dizia isto, também pensava em Napoleão?”
“Eu pensei no que estava dizendo.”[5,6]

WAISMANN PERGUNTA A WITTGENSTEIN: isto significa que uma proposição alcança além do que diz e toca em outras coisas?

WITTGENSTEIN: Vou explicar para você. Neste trabalho, estou continuamente preocupado

1. Casa da família Wittgenstein; habitada na época pela irmã mais velha de Wittgenstein, Hermine, e seu irmão Paul. Schlick não estava presente nesta ocasião, pois provavelmente já havia partido para a América. (N. E.)

2. Muito provavelmente trata-se das primeiras páginas do EM, onde muitos tópicos desta conversa são discutidos. (N. E.)

3. O que McGuinness, o editor deste texto, classifica com a sigla *EM* é um conjunto de cinco manuscritos produzidos entre 1930 e 1931. Na classificação mais em uso atualmente, proposta por George von Wright e praticada pelos Arquivos Wittgenstein da Universidade de Bergen (cf. www.wittgensteinsource.org), *EM* corresponde aos MSS 109, 110, 111, 112 e 113. O datiloscrito que corresponde a estes manuscritos, e que provavelmente começou a ser produzido nesta mesma época, é o TS 211, de acordo com a classificação de von Wright. Nas primeiras páginas do TS 221, discute-se sobre sinais, regras e linguagem, e, de fato, há várias palavras e expressões com sublinhado em traços descontínuos, tal como informa Waismann. É muito interessante que Waismann perceba “um alemão terrível” na escrita de Wittgenstein, como se fosse ainda uma série de formulações linguísticas a serem transformadas futuramente em um texto mais embelezado por proposiçoes, adjetivos, advérbios e figuras de linguagem com propósitos elucidativos. No entanto, hoje sabemos que não foi bem assim que Wittgenstein poliu e apurou a sua escrita nos datiloscritos posteriores, senão na direção contrária, de uma grande condensação, extrema economia e, digamos assim, esoterismo. De forma que o seu texto não é compreensível pelo leitor ainda desinformado a respeito de como e por quê o autor trata daqueles temas filosóficos de uma maneira tão idiossincrática. (N. T.)

4. Este era o procedimento usual de Wittgenstein. (N. E.)

5. O texto ocorre aproximadamente no MS Vol. VII (1931) de Wittgenstein, em EM p.17, e posteriormente em PG Seção § 53. (N. E.)

6. Na classificação de von Wright, a informação de McGuinness corresponde ao MS 111, p. 26, e TS 211, p. 17. (N. T.)

ist ja heute die, daß das Verstehen ein psychologischer Prozeß ist, der sich »in mir« abspielt. Ich frage nun: Ist das Verstehen ein Prozeß, der dem Satz - d. h. dem gesprochenen oder geschriebenen Satz - entlangläuft? Welche Struktur hat dann dieser Prozeß? Etwa dieselbe, wie der Satz? Oder ist dieser Prozeß etwas Amorphes, etwa so, wie wenn ich den Satz lese und dabei Zahnweh habe?

Ich glaube nun, daß das Verstehen gar kein besonderer psychologischer Prozeß ist, der noch außerdem da ist und zu der Wahrnehmung des Satzbildes hinzukommt. Wenn ich einen Satz höre oder einen Satz lese, so spielen sich allerdings verschiedene Prozesse in mir ab. Es taucht etwa ein Vorstellungsbild auf, es sind Assoziationen da und so weiter. Aber alle diese Prozesse sind nicht das, was mich daran interessiert. Ich verstehe den Satz, indem ich ihn *anwende*. Das Verstehen ist also gar kein besonderer Vorgang, sondern es ist das Operieren mit dem Satz. *Der Satz ist dazu da, daß wir mit ihm operieren*. (Auch das, was ich tue, ist eine Operation).

Die Ansicht, gegen die ich mich in diesem Zusammenhang kehren möchte, ist die, daß es sich bei dem Verstehen um einen *Zustand* handelt, der in mir vorhanden ist, wie z. B. die Zahnschmerzen. Daß das Verstehen aber nichts mit einem Zustand zu tun hat, das sieht man am besten, wenn man fragt: »Verstehst du das Wort Napoleon?« »Ja.« »Meinst du den Sieger von Austerlitz?« »Ja.« »Hast du das ununterbrochen die ganze Zeit gemeint?« Es hat offenbar keinen Sinn, zu sagen, ich habe das die ganze Zeit gemeint, so wie ich sagen kann: Ich habe ununterbrochen die ganze Zeit Zahnweh gehabt. Ich kann nun sagen: Ich bin mir der Bedeutung von »Napoleon« in derselben Weise bewußt, wie ich gewußt habe, daß 2 + 2 = 4 ist, nämlich nicht in Gestalt eines Zustandes, sondern in Gestalt einer Disposition. Daß ich das Praeteritum verwende - »Ich meinte den Sieger von Austerlitz« - bezieht sich nicht auf das Meinen, sondern darauf, daß ich vorhin jenen Satz ausgesprochen habe. Es hätte aber keinen Sinn anzunehmen, daß ich zu einer bestimmten Zeit das Wort »Napoleon« verstehe. Denn man müßte ja fragen können: *Wann* verstehe ich es denn? Schon beim ersten N? Oder erst nach der ersten Silbe? Oder erst am Schluß des ganzen Wortes? So komisch es klingt, das wären lauter wirkliche Fragen.

Das Verstehen eines Wortes oder eines Satzes ist ein Kalkulieren (?)

WAISMANN: Dieser Gebrauch des Wortes Kalkül ist doch ungewohnt. Sie haben früher immer selbst Gewicht auf die Unterscheidung des Kalküls von der Theorie gelegt. Sie sagten: Was ist der Unterschied zwischen einem Kalkül und einer Theorie? Einfach der, daß die Theorie etwas beschreibt, der Kalkül aber nichts beschreibt, sondern ist.[78]

WITTGENSTEIN : Sie dürfen nicht vergessen, daß ich jetzt nicht von den Sätzen rede, sondern von der Handhabung der Zeichen. Ich sage : Die Art, wie wir die Zeichen verwenden, bildet den Kalkül, und zwar sage ich das mit Absicht. Es besteht nämlich zwischen der Art der Verwendung unserer Worte in der Sprache und einem Kalkül nicht etwa eine bloße Analogie, sondern ich kann tatsächlich den Begriff des Kalküls so fassen, daß die Anwendung der Worte darunter fällt. Ich will gleich erklären, wie ich das meine. Ich habe hier ein Fläschchen mit Benzin. Wozu es mir dient? Nun zum Waschen. Nun ist hier ein Zettel aufgeklebt mit der Aufschrift »Benzin«. Wozu ist nun diese Aufschrift da? Ich wasche doch mit Benzin, aber nicht mit der Aufschrift.

7. Siehe oben, S. 143 f u. 151 ff. (F. H.)

8. Die Verwendung des Wortes „Kalkül" auf einen psychologischen Begriff, das heißt, dass „das Verstehen eines Wortes oder eines Satzes ain Kalkül ist", stell Waismanns Auffassung von Rechnung ins Wanken und zeigt deutlich die praxiologische Charakteristik von Wittgensteins Ansatz der Mathematik und Psychologie – ein Programm, das er in den nächsten 20 Jahren entwickeln wird. Es geht immer darum, was wir in einem bestimmten Kontext tun, in dem wir eine Technik anwenden, eine gerelgete Reihe von Verfahren, um bestimmte Schwierigkeiten zu lösen. (A. U.)

com a questão do que significa *compreender* uma proposição. Isto tem a ver com a questão geral do que se chama de *intenção*, *querer dizer* e *significado*. A visão comum hoje é que a compreensão é um processo psicológico que se passa "em mim". Eu agora pergunto: a compreensão é um processo que acompanha a proposição - isto é, a proposição falada ou escrita? Qual é a estrutura deste processo então? Quase igual ao da proposição? Ou este processo é algo amorfo, como quando leio a proposição e tenho dor de dente?

Agora acredito que a compreensão não é de forma alguma um processo psicológico especial que também está lá e é adicionado à percepção da imagem da proposição. Quando ouço uma proposição, ou leio uma proposição, no entanto, passam-se diferentes processos em mim. Por exemplo, uma imagem emerge, existem associações e assim por diante. Mas todos estes processos não são o que me interessa. Eu compreendo a proposição ao *aplicá-la*. A compreensão, portanto, não é um processo especial, mas é o operar com a proposição. *A proposição está aí para que operemos com ela*. (Também o que faço é uma operação).

O ponto de vista contra o qual eu gostaria de me voltar neste contexto é que se trate, na compreensão, de um *estado* que está presente em mim, como, por exemplo, a dor de dente. Mas para que se veja melhor que a compreensão não tem nada a ver com um estado de coisas basta perguntar: "Você compreende a palavra Napoleão?" "Sim". "Você se refere ao vencedor em Austerlitz?" "Sim". "Foi isto o que você quis dizer o tempo todo?" Obviamente não tem nenhum sentido dizer que eu quis dizer isto o tempo todo, assim como posso dizer: eu tive dor de dente o tempo todo. Porém posso dizer: estou ciente do significado de "Napoleão" da mesma forma que sabia que 2 + 2 = 4, ou seja, não na forma de um estado, mas na forma de uma disposição. O fato de eu usar o pretérito - "Eu me referi ao vencedor de Austerlitz" - não se refere ao que quero dizer, mas ao fato de eu ter pronunciado aquela sentença antes. Mas não haveria sentido em supor que eu compreenderia a palavra "Napoleão" em um tempo determinado. Porque então teríamos que também poder perguntar: *quando* é que o compreendo? No som do primeiro N? Ou depois da primeira sílaba? Ou no final de toda a palavra? Por mais estranho que pareça, todas estas são questões reais.

A compreensão de uma palavra ou de uma sentença é um cálculo (?)

WAISMANN: Este uso da palavra cálculo é inusitado. No passado, você sempre enfatizou a distinção entre cálculo e teoria. Você dizia: qual é a diferença entre um cálculo e uma teoria? Simplesmente que a teoria descreve algo, mas o cálculo não descreve nada, senão que está lá.[78]

WITTGENSTEIN: Você não deve esquecer que não estou falando sobre as sentenças agora, mas sobre o manejo dos sinais. Eu digo: a maneira como empregamos os sinais forma o cálculo, e digo isto até de propósito. Pois não há uma mera analogia entre o modo como nossas palavras são usadas na linguagem e no cálculo, senão que posso realmente apreender o conceito de cálculo de tal maneira que a aplicação das palavras lhe afeta. Vou explicar em um momento o que quero dizer. Eu tenho uma garrafa com benzina aqui. Para que isto me serve? Bem, para fazer limpeza. Agora, tem um papelzinho colado aqui com a inscrição "Benzina". Para que é este rótulo agora? Ora, eu limpo com benzina, não com o rótulo. (É claro que qualquer outro rótulo

7. Ver acima, p. 144s e 152ss. (N. E.)

8. O uso da palavra "cálculo" aplicada a um termo psicológico, isto é, que "a compreensão de uma palavra ou de uma sentença seja um cálculo", desconcerta a concepção de cálculo de Waismann e mostra claramente a característica praxiológica da abordagem de Wittgenstein tanto da matemática quanto da psicologia - programa que ele irá desenvolver nos próximos 20 anos. Trata-se sempre daquilo que fazemos dentro de um determinado contexto em que colocamos em prática uma técnica, um conjunto regrado de procedimentos, para resolver determinadas dificuldades. (N. T.)

(Es ist natürlich klar, daß statt dieser Aufschrift irgendeine andere stehen könnte.) Nun, diese Aufschrift ist ein Angriffspunkt für einen Kalkül, nämlich für die Anwendung. Ich kann Ihnen nämlich sagen: »Holen Sie das Benzin !« Und durch diese Aufschrift ist eine Regel da, nach der Sie vorgehen können. Wenn Sie das Benzin holen, so ist das wieder ein Schritt in demjenigen Kalkül, der durch die Regeln bestimmt ist. Ich nenne das ganze einen Kalkül, weil jetzt zwei Möglichkeiten bestehen, nämlich daß Sie nach der Regel vorgehen oder daß Sie nicht nach der Regel vorgehen; denn ich bin jetzt in der Lage, etwa zu sagen: »Ja, das, was Sie geholt haben, war ja gar nicht das Benzin !«

Die Namen, die wir im täglichen Leben gebrauchen, sind immer solche Täfelchen, die wir den Dingen umhängen und die uns als Angriffspunkte eines Kalküls dienen. Ich kann mir z. B. ein Täfelchen umhängen mit dem Namen »Wittgenstein«, Ihnen ein solches mit der Aufschrift »Waismann«. Statt dessen kann ich auch etwas anderes tun: Ich deute mit meinem Arm nacheinander dahin, dahin und dorthin und sage: Herr Müller, Herr Waismann, Herr Meier. Ich habe damit wieder Angriffspunkte eines Kalküls geschaffen. Ich kann z.B. sagen: Herr Waismann, gehen Sie in die Fruchtgasse! Was heißt das? Dort hängt wieder ein Täfelchen mit der Aufschrift »Fruchtgasse«.[9] Erst dadurch kann ich bestimmen, ob das, was Sie tun, richtig ist oder nicht.

WAISMANN: Die Bedeutung eines Wo rtes ist die Art seiner Verwendung. Wenn ich einem Ding einen Namen gebe, so stelle ich damit nicht etwa eine Assoziation her zwischen dem Ding und dem Wort, sondern ich deute eine Regel für die Verwendung dieses Wortes an. Die sogenannte »intentionale Beziehung« löst sich in solche Regeln auf. In Wirklichkeit liegt hier gar keine Beziehung vor, und wenn man von einer solchen spricht, so ist das nur eine unglückliche Redewendung.

WITTGENSTEIN: Ja und nein. Das ist eine komplizierte Sache. In gewissem Sinn kann man schon sagen, daß eine Beziehung vorliegt. Es ist nämlich eine Beziehung von genau derselben Art, wie die zwischen zwei Zeichen, die in einer Tabelle nebeneinander stehen. Ich deute z.B. mit dem Arm auf Sie und auf mich und sage: Herr Waismann, Herr Wittgenstein. (?)

Ich könnte ja auch einen Kalkül verwenden, in dem Herr Meier und Herr Waismann vertauschbar sind und die Fruchtgasse und der Stefansplatz, etwa so wie 3 x 5 und 15 vertauschbar sind.

Das, was ich mit den Wörtern der Sprache mache (indem ich sie *verstehe*), ist genau dasselbe wie das, was ich mit dem Zeichen im Kalkül mache: Ich operiere mit ihnen. Daß ich im einen Fall Handlungen ausführe, im andern nur die Zeichen hinschreibe oder auslösche etc., ist ja kein Unterschied; denn auch das, was ich im Kalkül mache, ist eine Handlung. *Hier gibt es keine scharfe Grenze*.

⟨KALKÜL UND ANWENDUNG⟩

Was ist der Unterschied zwischen der Sprache (M)[10] und einem Spiel? Man könnte sagen: Das Spiel hört dort auf, wo der Ernst beginnt, und der Ernst ist die Anwendung. Aber das wäre noch nicht ganz richtig ausgedrückt. Man müßte eigentlich sagen: Spiel ist das, was weder Ernst noch Spaß ist. Wir sprechen nämlich vom Ernst, wenn wir die Resultate des Kalküls für das tägliche Leben brauchen. Ich wende z.B. die Rechnung 8 X 7 = 5 6 tausende Male im täglichen

9. Waismann wohnte in der Fruchtgasse. Herr Müller und Herr Meier scheinen nicht wirkliche Personen zu sein. (F. H.)
10. Vielleicht »der Mathematik«. (F. H.)

poderia estar no lugar deste.) Bem, este rótulo é um ponto de partida para um cálculo, ou seja, para a aplicação. Porque eu posso te dizer: “Pega a benzina!” E por meio deste rótulo tem uma regra de acordo com você pode proceder. Quando você pega a benzina, este é mais uma vez um passo do cálculo determinado pelas regras. Eu chamo a coisa toda de cálculo porque agora existem duas possibilidades, a saber, que você proceda de acordo com a regra ou que você não proceda de acordo com a regra; pois agora estou em posição de dizer algo como: “Ora, o que você pegou não foi a benzina, de jeito nenhum!”

Os nomes que usamos no dia a dia são sempre tabuletas que penduramos nas coisas e que servem como pontos de partida para um cálculo. Eu posso, por exemplo, pendurar em mim uma tabuleta com o nome “Wittgenstein”, e em você outra com o rótulo “Waismann”. Em vez disto, posso fazer outra coisa: aponto com meu braço, primeiro ali, depois para ali e depois para lá, e digo: Sr. Müller, Sr. Waismann, Sr. Meier. Ao fazer isto, criei novamente pontos de partida para um cálculo. Por exemplo, posso dizer: Sr. Waismann, vá para Fruchtgasse! O que significa isto? Há outra tabuleta com o rótulo “Fruchtgasse” pendurada ali.[9] Só então poderei determinar se o que você está fazendo é correto ou não.

WAISMANN: O significado de uma palavra é o modo como ela se emprega. Quando dou um nome a uma coisa, não estou estabelecendo uma associação entre a coisa e a palavra, mas estou indicando uma regra para o emprego desta palavra. O assim chamado “relacionamento intencional” se dissolve nessas regras. Na realidade, não existe relacionamento algum, e falar-se de alguma coisa assim é apenas uma frase infeliz.

WITTGENSTEIN: Sim e não. Esta é uma coisa complicada. Em certo sentido, pode-se dizer que existe uma relação. Ou seja, existe uma relação exatamente do mesmo tipo que entre dois sinais que estão um ao lado do outro em uma tabela. Por exemplo, aponto meu braço para você e para mim mesmo e digo: Sr. Waismann, Sr. Wittgenstein. (?)

Eu também poderia empregar um cálculo em que Sr. Meier e Sr. Waismann, e Fruchtgasse e Stefansplatz, sejam intercambiáveis, tal como 3 x 5 e 15 são intercambiáveis.

O que faço com as palavras da linguagem (ao *compreendê-las*) é exatamente o mesmo que faço com o sinal no cálculo: opero com elas. O fato de que em um caso eu realizo ações, no outro apenas anoto os sinais, ou os apago etc., não faz diferença; porque o que eu faço no cálculo também é uma ação. *Não há nenhum limite nítido aqui*.

⟨CÁLCULO E APLICAÇÃO⟩

Qual é a diferença entre a linguagem (M)[10] e um jogo? Pode-se dizer: o jogo termina onde começa a seriedade, e a seriedade é a aplicação. Mas isto ainda não estaria expresso tão corretamente. Na verdade, teríamos que dizer: o jogo é o que não é sério nem divertido. Falamos de seriedade quando precisamos dos resultados do cálculo para o dia a dia. Por exemplo, eu uso o cálculo 8 X 7 = 5 6 milhares de vezes na vida diária, e é por isso que o levamos a sério. Mas, por

9. Waismann morava na “Fruchtgasse”. O Sr. Müller e o Sr. Meier não parecem ser pessoas reais. (N. E.)
10. Talvez “Matemática”. (N. E.)

Leben an, und deshalb ist es uns Ernst. Aber an und für sich unterscheidet sich ja die Multiplikation nicht im geringsten von einer, die ich nur zum Vergnügen mache. In der Rechnung selbst liegt der Unterschied nicht, und man kann daher dem Kalkül auch nicht ansehen, ob er Ernst ist oder uns zum Vergnügen dient. Ich kann daher nicht sagen: Ein Kalkül ist Spiel, wenn er mir Spaß macht, sondern nur: Ein Kalkül ist Spiel, wenn ich ihn *so auffassen kann*, daß er mir Spaß macht. Im Kalkül selbst liegt weder die Beziehung auf den Ernst noch auf den Spaß.

Denken wir an das Schachspiel! Heute bezeichnen wir es als Spiel. Gesetzt aber, ein Krieg würde so geführt werden, daß die Truppen auf einer schachbrettförmigen Wiese miteinander kämpfen, und daß derjenige, der matt gesetzt wird, den Krieg verloren hat. Dann würden sich die Offiziere genau so über das Schachbrett beugen, wie heute über die Generalstabskarten. Das Schach wäre jetzt kein Spiel mehr, sondern Ernst.[11]

⟨DAS NACHSCHAUEN IN EINEM KALENDER⟩

Ich berechne, wann ich frei bin, indem ich den Kalender nachschaue. Das ist ebenso eine Rechnung, wie ∫sinx dx.

So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa

Wie kommt es nun eigentlich, daß ich auf Grund des Bildes, das ich da sehe, jemand für Freitag zu mir bestelle? Man muß wieder sagen: Ich gebrauche das Bild so, wie die Zeichen in einem Kalkül, als Angriffspunkt für das Tun. Auch das Nachschauen im Kalender ist ein Kalkül; denn ich operiere mit dem Bild, und wenn ich am Freitag zu jemand gehe oder jemand zu mir kommen lasse, so sind das weitere Schritte im Kalkül.

DER BAU EINES DAMPFKESSELS[12][13]

Warum denkt der Mensch, warum berechnet er z. B. die Dimensionen eines Dampfkessels und überläßt es lieber nicht dem Zufall, wie dick sie sein werden? Schützt uns etwa die Rechnung davor, daß der Kessel explodiert? Nein, der Kessel kann natürlich trotz der Berechnung explodieren. Aber so wenig ein Mensch seine Hand ins Feuer steckt, wenn er sich einmal verbrannt hat, genau so wenig verzichtet er darauf, den Kessel zu berechnen. Nun möchte ich folgendes sagen: Die Rechnung ist natürlich ein Kalkül. Ich gehe von gewissen Daten aus, addiere, multipliziere,

28 x 773
– – – – –
– – – – –
____
– – – – –

11. Siehe oben, S. 117 f und 189. (F. H.)
12. Vgl. PhU § 466; EM S. 68 f., 84. (F. H.)
13. In der derzeit gebräuchlichen Notation sind nach von Wrights Klassifikation die Stellen in Nachlass, an denen Wittgenstein das Dampfkessel-Beispiel als mit Zwecken korreliertes Denkmuster erwähnt, in MSS 109, S. 72-73; 110, S. 166; 111, S. 137; 114, S. 95, 97; 117, S. 136; 153a, S. 81r-81v; TSS 211, p. 84; 213, S. 227r, 386v; 227, S. 251; 228, s. 106; 230, S. 74; D 302, S. 22. (A. U.)

si só, a multiplicação não é nem um pouco diferente daquela que faço apenas para me divertir. A diferença não está no cálculo em si e, portanto, não se pode dizer se o cálculo é sério ou se é para nosso prazer. Portanto, não posso dizer: um cálculo é um jogo se eu achar divertido, mas apenas: um cálculo é um jogo se eu *puder concebê-lo de uma maneira* que me divirta. No cálculo em si não há relação com a seriedade nem com a diversão.

Imaginemos o jogo de xadrez! Hoje o designamos como jogo. Suponha, entretanto, que uma guerra seria travada de tal forma que as tropas lutassem umas contra as outras em um campo em forma de tabuleiro de xadrez, e quem levasse o xeque-mate perdesse a guerra. Então os oficiais se curvariam sobre o tabuleiro, exatamente como fazem hoje sobre os mapas cartográficos. O xadrez não seria mais um jogo, seria sério.[11]

⟨A VERIFICAÇÃO NUM CALENDÁRIO⟩

Calculo quando estou livre pela verificação no calendário. Isto é a mesma coisa que um cálculo como ∫sinx dx.

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab

Como é que, com base na figura que vejo ali, peço que alguém venha até a minha casa na sexta-feira? Temos que dizê-lo novamente: eu uso a figura como os sinais de um cálculo, como um ponto de partida para o fazer. Verificar o calendário é também um cálculo; pois opero com a figura, e se eu for para a casa de alguém na sexta, ou alguém vier até a minha casa, estes são outros passos do cálculo.

A CONSTRUÇÃO DE UMA CALDEIRA A VAPOR[12][13]

Por que as pessoas pensam, por que calculam, por exemplo, as dimensões de uma caldeira a vapor e preferem não deixar ao acaso a espessura que terão? Será que o cálculo nos protegeria da explosão da caldeira? Não, a caldeira pode explodir, é claro, apesar do cálculo. Mas assim como uma pessoa não põe mais a mão no fogo depois de se queimar, também não deixa de calcular a caldeira. Agora eu gostaria de dizer o seguinte: O cálculo é obviamente um cálculo. Eu começo a partir de certos dados, adiciono, multiplico,

28 x 773
– – – – –
– – – – –

11. Ver acima, p. 118s e 190. (N. E.)
12. Cf. IF § 466; EM, p. 68s, 84. (N. E.)
13. Na notação atualmente em uso, segundo a classificação de von Wright, as localizações no *Nachlass* em que Wittgenstein menciona o exemplo caldeira a vapor como amostra de pensamento correlacionado a finalidades ou propósitos, estão nos MSS 109, pp. 72-73; 110, p. 166; 111, p. 137; 114, pp. 95, 97; 117, p. 136; 153a, pp. 81r-81v; TSS 211, p. 84; 213, pp. 227r, 386v; 227, p. 251; 228, p. 106; 230, p. 74; D 302, p. 22. (N. T.)

und wenn zum Schluß die Zahl 15 herauskommt, so mache ich die Kesselwand 15 mm dick. Ich hätte natürlich die Rechnung, statt mit Zahlen, auch mit ganzen Sätzen ausführen können, ich hätte dann mit den Sätzen kalkuliert. Daß ich mit den Zahlen rechne, bedeutet ja nur eine Abkürzung, weil dieselbe Rechnung in 1000 verschiedenen Zusammenhängen vorkommt, d. h. weil 1000 verschiedene Kalkulationen mit Sätzen dieses eine Stück gemeinsam haben.

Und nun ist folgendes wichtig: Wenn ich die Zahl 15 herausbekomme und daraufhin den Kessel 15 mm dick mache, so ist das Bauen des Kessels *wieder ein Schritt in diesem Kalkül* und nicht etwa etwas ganz anderes. [Die Rechnung und die technische Konstruktion gehören zusammen. Sie sind verschiedene Teile eines Kalküls.][14]

Fragt man mich nun: Hast du auch ein Recht gehabt, den Kessel 15 mm dick zu machen? Kannst du ruhig schlafen?, so muß ich mit der Gegenfrage antworten: Was heißt hier »Recht«? Meint man damit: Wir wissen, daß es unmöglich ist, daß der Kessel explodiert, so habe ich kein Recht gehabt. Wenn aber mit »Recht« gemeint ist, daß ich den Kessel in diesem Kalkül berechnet habe, dann habe ich eben das Recht. Mehr kann man darüber nicht sagen.

EXISTENZBEWEIS

Wenn ich einmal beweise, daß eine Gleichung n-ten Grades n Lösungen haben muß, indem ich z. B. einen der Gauß'schen Beweise gebe, und wenn ich ein zweites Mal die Existenz dadurch beweise, daß ich das Verfahren zur Konstruktion der Lösungen angebe, so habe ich nicht etwa zwei verschiedene Beweise für denselben Satz gegeben, sondern ich habe ganz verschiedene Dinge bewiesen. Was gemeinsam ist, ist ja nur der Satz der Prosa »Es gibt n Lösungen«, der aber für sich genommen überhaupt nichts bedeutet, sondern nur zur Abkürzung für einen Beweis steht. Sind die Beweise verschieden, so *bedeutet* jener Satz eben Verschiedenes.[15] Daß man in beiden Fällen von »Existenz« spricht, hat seinen Grund darin, daß der Beweis für die Existenz der Lösungen eine gewisse Verwandtschaft zeigt mit dem Verfahren der Konstruktion der Lösungen. Aber an sich darf man die Worte »Es gibt« in diesem Zusammenhang durchaus nicht so verstehen, wie wir sie im täglichen Leben verstehen, wenn ich etwa sage: »Es gibt in diesem Zimmer einen Menschen«.

Der Beweis beweist nur, was er beweist, und nichts darüber hinaus.[16]

[Die Worte »Es gibt« gehören gleichfalls einem Kalkül an, nur einem anderen, als dieselben Worte in der Umgangssprache.]

⟨WIDERSPRUCHSFREIHEIT VI⟩

Versteckter Widerspruch

14. WAISMANN FRAGT WITTGENSTEIN: Ich glaube, in diesem Sinne ist alles Handeln ein Kalkül. Das Handeln unterscheidet sich eben gerade dadurch von einem bloßen Ablauf, daß es nach Regeln geschieht, d. h., daß es Te il eines Kalküls ist.
WITTGENSTEIN: Vielleicht kann man das so sagen, ich weiß es nicht. (A. W.)
15. Siehe oben, S. 123. (F. H.)
16. Siehe oben, S. 3 f. u. 123ff. (F. H)

e quando se obtém o número 15 no final, faço a parede da caldeira com 15 mm de espessura. Claro que eu poderia ter feito o cálculo com proposições inteiras em vez de números, eu teria então calculado com as proposições. O fato de eu calcular com os números significa apenas uma abreviação, porque o mesmo cálculo ocorre em 1.000 contextos diferentes, ou seja, porque 1.000 cálculos diferentes com proposições têm esta peça em comum.

E agora o seguinte é importante: se eu pegar o número 15 e depois fizer a caldeira com 15 mm de espessura, a construção da caldeira é *mais um passo deste cálculo* e não algo completamente diferente. [O cálculo e a construção técnica se pertencem mutuamente. São partes diferentes de um cálculo.][14]

Agora, se me perguntam: você também estava certo ao fazer a caldeira com 15 mm de espessura? Você consegue dormir em paz?, então tenho que responder com a contra-pergunta: o que "certo" significa aqui? Se você quer dizer: sabemos que é impossível o caldeirão explodir, então eu não estava certo. Mas se "certo" significa que calculei a caldeira com estas contas, então estou certo. Não se pode dizer mais nada sobre isto.

PROVA DE EXISTÊNCIA

Se eu alguma vez provar que uma equação de enésimo grau tem que ter n soluções, dando, por exemplo, uma das provas gaussianas, e se numa segunda vez eu assinalar o procedimento para construir as soluções, e, por este meio, demonstrar a existência, então não dei duas demonstrações diferentes para o mesmo teorema, mas provei coisas completamente diferentes. O que está em comum é apenas a proposição em prosa "Existem n soluções", que, no entanto, em si não significam absolutamente nada, mas é apenas uma abreviação para uma demonstração. Se as demonstrações são diferentes, este teorema *significa* coisas diferentes.[15] A razão pela qual se fala de "existência" em ambos os casos é que a prova da existência das soluções mostra uma certa relação com o método de construção das soluções. Mas, por si só, a palavra "há" neste contexto não deve ser compreendidas como a compreendemos na vida cotidiana quando digo, por exemplo: "Há uma pessoa nesta sala".

A prova demonstra apenas o que demonstra e nada mais.[16]

[A palavra "há" também pertence a um cálculo, só que a um outro que não é o da mesma palavra na linguagem ordinária.]

⟨CONSISTÊNCIA VI⟩

Contradição oculta

WAISMANN PERGUNTA A WITTGENSTEIN: Eu gostaria de incluir o que você discutiu na

14. WAISMANN PERGUNTA A WITTGENSTEIN: Acredito que, neste sentido, toda ação é um cálculo. A ação difere de um mero processo precisamente porque acontece de acordo com regras, ou seja, é parte de um cálculo.
WITTGENSTEIN: Talvez se possa dizer assim, não sei. (N. W.)
15. Ver acima, p. 124 (N. E.)
16. Ver acima, pp. 4s e 124ss. (N. E.)

WAISMANN FRAGT WITTGENSTEIN: Ich möchte das, was Sie seinerzeit über die Widerspruchsfreiheit auseinandergesetzt haben, in meine Arbeit[17] aufnehmen, stoße da aber auf eine Schwierigkeit.

Sie sagten, im Kalkül gäbe es überhaupt keinen Widerspruch.[18] Ich verstehe nun nicht, wie sich das mit dem Wesen des indirekten Beweises zusammenreimt; denn dieser Beweis beruht ja gerade darauf, daß im Kalkül ein Widerspruch hergestellt wird.[19]

WITTGENSTEIN: Was ich meine, hat ja mit dem indirekten Beweis überhaupt nicht das geringste zu tun. Da liegt eine Verwechslung vor. Natürlich gibt es im Kalkül Widersprüche. Was ich meine, ist nur dies: Es hat keinen Sinn, von einem *versteckten Widerspruch* zu reden.[20] Was wäre denn ein versteckter Widerspruch? Ich kann z.B. sagen: Die Teilbarkeit der Zahl 357567 durch 7 ist versteckt, nämlich so lange, als ich das Kriterium - etwa die Teilerregel - nicht angewendet habe. Um die Teilbarkeit aus einer versteckten zu einer offenen zu machen, brauche ich nur das Kriterium anzuwenden. Verhält es sich nun etwa mit dem Widerspruch ebenso? Offenbar nicht. Ich kann ja den Widerspruch nicht dadurch ans Licht ziehen, daß ich ein Kriterium anwende. Nun sage ich: Dann hat die ganze Rede von einem versteckten Widerspruch keinen Sinn, und die Gefahr, von der die Mathematiker reden, als ob in der heutigen Mathematik ein Widerspruch verborgen sein könnte wie eine versteckte Krankheit, diese Gefahr ist eine bloße Einbildung.

Man könnte nun fragen: Was aber dann, wenn eines Tages eine Methode gefunden würde, um das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein eines Widerspruchs festzustellen? Dieser Satz ist sehr merkwürdig. Er tut so, als ob man die Mathematik unter einer Voraussetzung betrachten könnte, nämlich unter der Voraussetzung, daß eine Methode gefunden wird. Nun kann ich z.B. fragen, ob man in diesem Zimmer einen Menschen mit roten Haaren gefunden hat, und diese Frage hat ihren guten Sinn, denn ich kann den Menschen beschreiben, auch wenn er nicht da ist. Dagegen kann ich nicht nach einer Methode für die Feststellung eines Widerspruchs fragen, denn ich kann sie ja erst beschreiben, wenn sie da ist. Ist sie noch nicht entdeckt, so habe ich keine Möglichkeit, sie zu beschreiben, und was ich sage, sind leere Worte. Ich kann also auch gar nicht die Frage aufwerfen, was geschehen würde, wenn eine Methode entdeckt würde.

Mit der Methode zum Nachweis eines Widerspruchs verhält es sich genau so wie mit dem Goldbachsehen Satz: Was hier geschieht, ist der planlose Versuch der Konstruktion eines Kalküls. Gelingt der Versuch, so habe ich wieder einen Kalkül vor mir, nur einen anderen als der, den ich bisher benutzt habe. Aber ich habe doch nicht bewiesen, *daß der Kalkül ein Kalkül ist*, und das kann man auch gar nicht beweisen.

Wenn jemand die Einführung der irrationalen Zahlen so beschreiben würde, daß er sagt, er habe entdeckt, daß zwischen den rationalen Punkten der Geraden noch weitere Punkte liegen, so würden wir ihm antworten: Du hast ja nicht zwischen den bisherigen Punkten neue Punkte entdeckt, sondern du hast neue Punkte konstruiert; du hast also einen neuen Kalkül vor dir.

Dasselbe muß man Hilbert sagen, wenn er meint, es sei eine *Entdeckung*, daß die Mathematik widerspruchsfrei ist. In Wirklichkeit ist es so, daß Hilbert nichts konstatiert, sondern bestimmt;

17. Beweis, daß Waismann zu jener Zeit Wittgensteins Ideen hätte veröffentlichen sollen. (F. H.)
18. Siehe oben, S. 135 f. (F. H.)
19. Der Beweis durch Reduktion auf Absurdität, den Waismann hier „indirekten Beweis" nennt, nutzt einen Widerspruch zwischen den Prämissen eines Arguments aus, um jede Prämisse des Arguments zu leugnen und stellt damit das Gegenteil von dem, was ursprünglich angenommen wurde, als Wahrheit fest. Unter diesem Gesichtspunkt, natürlich ein Irrtum von Waismann, könnte jede Berechnung schließlich einen Widerspruch enthalten. (A. U.)
20. Siehe oben, S. 137. (F. H.)

época sobre consistência em meu trabalho,[17] mas encontro uma dificuldade.

Você disse que não havia nenhuma contradição no cálculo.[18] Agora não entendo como isto combina com a natureza da prova indireta; pois esta prova se baseia precisamente no fato de que uma contradição é estabelecida no cálculo.[19]

WITTGENSTEIN: O que quero dizer não tem absolutamente nada a ver com a prova indireta. Há uma confusão aqui. Claro que existem contradições no cálculo. O que quero dizer é apenas o seguinte: não adianta falar de uma *contradição oculta*.[20] O que seria uma contradição oculta? Por exemplo, posso dizer: A divisibilidade do número 357567 por 7 está oculta, digamos, enquanto eu não tiver aplicado um critério - como a regra do divisor. Para transformar a divisibilidade de oculta em aberta, só preciso aplicar o critério. É o mesmo com a contradição? Obviamente não. Não posso trazer a contradição à luz aplicando um critério. Agora eu digo: então toda a conversa sobre uma contradição oculta não tem sentido, e o perigo que os matemáticos falam como se uma contradição pudesse estar oculta na matemática de hoje como uma doença oculta, este perigo é mera imaginação.

Agora se poderia perguntar: mas e se um dia fosse encontrado um método para determinar a presença ou ausência de uma contradição? Esta proposição é muito estranha. Ela age como se alguém pudesse olhar para a matemática sob uma pressuposição, ou seja, sob a pressuposição de que um método seja encontrado. Mas posso perguntar, por exemplo, se uma pessoa ruiva se encontra nesta sala, e esta pergunta faz sentido porque posso descrever a pessoa mesmo quando ela não está lá. Por outro lado, não posso pedir um método para estabelecer uma contradição, porque não posso descrevê-la até que ela esteja lá. Se ainda não foi descoberta, não tenho como descrevê-la, e o que estou dizendo são palavras vazias. Portanto, não posso nem perguntar o que aconteceria se um método fosse descoberto.

Com o método de verificação de uma contradição ocorre o mesmo que com o teorema de Goldbach: o que está acontecendo aqui é a tentativa aleatória de construção de um cálculo. Se a tentativa for bem-sucedida, tenho novamente um cálculo diante de mim, só que diferente do que utilizei até agora. Mas eu não demonstrei *que o cálculo é um cálculo*, e isto não pode ser demonstrado de forma alguma.

Se alguém descrevesse a introdução de números irracionais de tal forma que dissesse que descobriu que ainda existem outros pontos entre os pontos racionais da linha reta, responderíamos a ele: você não descobriu novos pontos entre os pontos anteriores, mas você construiu novos pontos; portanto, você tem um novo cálculo à sua frente.

A mesma coisa tem que ser dita a Hilbert quando ele pretende que é uma *descoberta* o fato de que a matemática seja consistente. Na realidade, Hilbert nada verifica, mas sim determina; ele determina um novo cálculo.

Quando Hilbert diz: "0 ≠ 0" não deve aparecer como uma fórmula demonstrável,[21] ele determina um cálculo por meio de permissão e proibição.

17. Prova de que Waismann naquela época pretendia publicar as ideias de Wittgenstein. (N. E.)
18. Ver, acima, p . 136s (N. E.)
19. A prova por redução ao absurdo, que Waismann aqui chama de "prova indireta", toma partido de uma contradição entre as premissas de um argumento para denegar qualquer premissa do argumento, estabelecendo assim como verdade o contrário do que se assumiu inicialmente. Deste ponto de vista, claro que equivocado da parte de Waismann, qualquer cálculo poderia eventualmente conter uma contradição. (N. T.)
20. Ver, acima, p. 138. (N. E.)
21. Op. cit. (ver nota de rodapé da p. 136, acima). (N. E.)

er bestimmt einen neuen Kalkül.

Wenn Hilbert sagt: »0 ≠ 0« soll nicht als beweisbare Formel auftreten,[21] so bestimmt er durch Erlaubnis und Verbot einen Kalkül.

WIDERSPRUCH

WAISMANN FRAGT WITTGENSTEIN: Sie sagten aber doch, daß im Kalkül selbst kein Widerspruch auftreten kann, sondern nur in den Regeln. Die Konfigurationen können doch keinen Widerspruch darstellen.[22] Ist das auch jetzt noch Ihre Ansicht?

WITTGENSTEIN: Ich würde sagen, daß auch die Regeln einen Kalkül bilden, nur einen anderen. Es kommt vor allem darauf an, daß wir uns über den Begriff des Widerspruchs verständigen. Denn wenn Sie etwas anderes darunter verstehen als ich, dann können wir uns nicht einig werden.

Das Wort »Widerspruch« ist zunächst von dorther genommen, wo wir es alle verwenden, nämlich von den Wahrheitsfunktionen, und bedeutet etwa: »p. ~ p«. Von einem Widerspruch kann also zunächst nur dort die Rede sein, wo es sich um Aussagen handelt.

Da die Formeln des Kalküls keine Aussagen sind, so kann es im Kalkül auch keinen Widerspruch geben. Doch kann man natürlich eine Bestimmung treffen, nach der man eine bestimmte Konfiguration des Kalküls, z. B. »0 ≠ 0« , einen Widerspruch nennt. Nur entsteht dann immer die Gefahr, daß man dabei an den Widerspruch der Logik denkt, also die Begriffe »Widerspruch« und »unerlaubt« miteinander verwechselt. Denn wenn ich im Kalkül eine bestimmte Konfiguration von Zeichen als Widerspruch bezeichnete, so bedeutet das ja nur, daß die Bildung dieser Konfiguration nicht erlaubt wird: Wenn man bei einem Beweis auf eine solche Formel stößt, so soll irgendetwas geschehen, es soll z. B. die Ausgangsformel gestrichen werden.

Ich möchte vorschlagen, um diesen Verwechslungen zu entgehen, statt des Wortes »Widerspruch« ein ganz neues Zeichen zu verwenden, bei dem wir uns nichts anderes denken, als was wir ausdrücklich bestimmt haben, sagen wir das Zeichen Z. *Im Kalkül ist nichts selbstverständlich*. Wenn die Formel Z auftritt, so bedeutetdas noch gar nichts: Wir haben erst weitere Festsetzungen zu treffen.

Man sieht daraus, daß es ganz unberechtigt ist, im »Widerspruch« etwas zu erblicken, was tabu ist, genausowenig, wie wenn ich sagen wollte: Wenn die und die Formel auftritt, dann ist das Fürchterliche da.

Nebenbei bemerkt: Wenn Hilbert die Konfiguration »0 ≠ 0« einen Widerspruch nennt, so tut er das deshalb, weil er vom Widerspruch ja auch keinen anderen Begriff hat als wir beide, nämlich »p. ~ p«. Er will nämlich sagen: Einerseits ist 0 = 0, andererseits 0 ≠ 0 und diese beiden Formeln widersprechen einander, genau so, wie wenn wir etwa im Schachspiel sagen würden: Der Läufer darf gerade ziehen, und: Der Läufer darf nicht gerade ziehen.

WAISMANN: Darf ich die Sache ein wenig anders formulieren? Die Wörter »richtig« und »unrichtig« haben eine verschiedene Bedeutung, je nachdem, ob sie auf Beweise oder auf Formeln angewendet werden. Ein Beweis ist richtig, wenn er gemäß den Spielregeln geführt ist; unrichtig, wenn er einen Verstoß gegen diese Regeln enthält. Eine Formel ist richtig, wenn sie sich

21. A. a. O. (siehe oben S. 135 Anm.). (F. H.)
22. Siehe oben, S. 141 f. (F. H.)

CONTRADIÇÃO

WAISMANN PERGUNTA A WITTGENSTEIN: mas você disse que não pode haver contradição no cálculo em si, mas só nas regras. As configurações não podem apresentar nenhuma contradição.[22] Esta é ainda é sua visão agora?

WITTGENSTEIN: eu diria que as regras também formam um cálculo, só que um cálculo diferente. O que mais importa é que cheguemos a um entendimento sobre o conceito de contradição. Porque se você entende com isto algo diferente do que eu, então não podemos chegar a um acordo.

A palavra "contradição" é tomada do ponto em que todos nós a empregamos, ou seja, das funções de verdade, e significa algo como: "p. ~ p «. Uma contradição só pode ser falada inicialmente no que diz respeito a enunciados.

Visto que as fórmulas do cálculo não são enunciados, não pode haver contradição no cálculo. Mas pode-se, evidentemente, fazer uma determinação de acordo com a qual uma certa configuração do cálculo, por exemplo, "0 ≠ 0", deva ser chamada de contradição. Só então sempre há o perigo de que se pense na contradição da lógica, isto é, de confundir entre si os conceitos de "contradição" e de "proibido". Pois quando descrevo uma determinada configuração de sinais como uma contradição no cálculo, isto significa apenas que a formação desta configuração não é permitida: se você topar com uma fórmula assim em uma demonstração, algo deve acontecer, deve, por exemplo, ser excluída a fómula da qual se partiu.

Para evitar estas confusões, gostaria de propor a utilização de um sinal completamente novo, em vez da palavra "contradição", em que não pensamos em nada além do que expressamente determinamos, digamos o sinal Z. *No cálculo nada é autoevidente*. Se a fórmula Z aparecer, isto não significa nada: temos que fazer outras estipulações primeiro.

Vê-se por isto que é totalmente injustificado enxergar algo na "contradição" que seja tabu, tão pouco como quando queria dizer: quando esta ou aquela fórmula aparecer, então o terrível estará ali.

A propósito: quando Hilbert chama a configuração "0 ≠ 0" de contradição, ele o faz porque não tem um conceito de contradição diferente de nós dois, a saber, "p. ~ p «. O que ele quer dizer é: por um lado 0 = 0, por outro lado 0 ≠ 0, e estas duas fórmulas se contradizem, tal como se disséssemos em um jogo de xadrez: o bispo pode mover-se em linha reta, e: o bispo não pode se mover em linha reta.

WAISMANN: Posso formular a questão de maneira um pouco diferente? As palavras "correto" e "incorreto" têm significados diferentes, dependendo se são aplicadas a demonstrações ou a fórmulas. Uma demonstração é correta se for dada de acordo com as regras do jogo; incorreta se contiver uma violação destas regras. Uma fórmula é correta se for o resultado de uma demonstração conduzida corretamente. Mas não se deve dizer: uma fórmula é incorreta se for o resultado de demonstrações fornecidas incorretamente. Neste caso, só se pode dizer que ela

22. Ver acima, p. 142s. (N. E.)

als Resultat eines richtig geführten Beweises ergibt. Aber man darf nicht etwa sagen: Eine Formel ist unrichtig, wenn sie das Resultat eines unrichtig geführten Beweises ist. In diesem Fall kann man nur sagen, daß sie nicht bewiesen ist. Ich muß also eine neue Bestimmung treffen, wann eine Formel unrichtig heißen soll. In der Arithmetik kann ich das z.B. dadurch tun, daß ich sage: Eine Pormel soll dann unrichtig heißen, wenn sich aus ihr die Formel »0 ≠ 0« ableiten läßt. Nur meine ich: Wenn man die Ausdrücke »richtig« und »unrichtig« in dieser Weise erklärt, dann verhalten sie sich gar nicht wie Bejahung und Verneinung zueinander. Es kann sehr wohl sein, daß eine Formel richtig und unrichtig zugleich ist. Das bedeutet ja nur, daß sich aus den Grundformeln die Formel »0 ≠ 0« herleiten läßt. - Hier hört, soviel ich sehe, die Analogie mit dem Schachspiel auf. Ich kann nämlich nur fragen, ob ein Zug richtig war, und dem entspricht in der Mathematik die Frage, ob ein Schritt des Beweises richtig ist. Dagegen kennt die Arithmetik eine Aufgabe, die das Schachspiel nicht kennt, nämlich die: zu prüfen, ob eine Formel richtig ist oder nicht.

WITTGENSTEIN: Sie haben vollkommen recht damit, daß wir eine Bestimmung brauchen, wann eine Formel unrichtig ist. Aber wenn wir so vorgehen würden, wie Sie sagen, so würden wir die Worte mißbrauchen, denn »unrichtig« ist nun einmal die Verneinung von »richtig«. Wir können uns aber sehr einfach helfen, indem wir eben andere Ausdrücke gebrauchen. Dann kann niemand etwas dagegen haben, daß wir diese Bestimmungen treffen.

Wie fängt man es dann an, festzustellen, daß eine Formel falsch ist? Z.B. die Formel 7 x 5 = 30? Woher wissen wir, daß, wenn 7 x 5 = 35 ist, es nicht auch 31 ist? Was würden wir denn tun, wenn jemand sagt: »8 x 7 = 75« ? Wir würden sagen: »Ja, was machst du denn da? Das ist ja falsch!« Wenn er uns nun erwidern würde: »Ja, wieso denn? Ich habe es nun einmal so festgesetzt«, so könnten wir ihm nur sagen: »Ja, dann verwendest du eben einen anderen Kalkül als den usuellen, den man Multiplizieren nennt. Deinen Kalkül kennen wir nicht. Gehen wir nach den Regeln vor, die uns gegeben sind, dann ist eben 8 x 7 = 56 und nicht 75 , und das ist die Widerlegung.«

Wenn jemand sagt, daß 8 x 7 = 75 ist, so hat er dazu ebensoviel oder ebensowenig Recht, wie wenn er das Wort »Tisch« in gänzlich neuer Weise definieren würde. Die Definition ist gewiß willkürlich. Aber trotzdem kann man sagen, daß eine Definition falsch ist, wenn sie nämlich nicht das wiedergibt, was man tatsächlich meint. In diesem Sinne ist auch die Formel 8 x 7 = 75 falsch.

⟨*Gleichung und Ersetzungsregel II*⟩

WAISMANN FRAGT WITTGENSTEIN: Die Gleichung hat in der Arithmetik eine doppelte Bedeutung: Sie ist Konfiguration und sie ist Ersetzungsregel. Was würde nun geschehen, wenn in der Arithmetik oder in der Analysis ein Beweis für die Formel »0 ≠ 0« gefunden würde? Dann müßte der Arithmetik eine ganz andere Deutung gegeben werden; denn wir hätten nicht mehr das Recht, die Gleichung als Ersetzungsregel zu interpretieren. »0 ist nicht durch 0 ersetzbar« heißt ja nichts. Ein Anhänger Hilberts könnte nun sagen: Da sieht man, was der Beweis der Widerspruchsfreiheit eigentlich leistet. Dieser Beweis soll uns nämlich zeigen, daß wir das Recht haben, die Gleichung als Ersetzungsregel aufzufassen.

WITTGENSTEIN: Das kann es natürlich nicht heißen. Zunächst: Wieso kommt es denn, daß wir die Gleichung als Ersetzungsregel auffassen dürfen? Nun, einfach deshalb, weil die Grammatik des Wortes »ersetzen« dieselbe ist wie die Grammatik der Gleichung. Deshalb bes-

não foi demonstrada. Portanto, tenho que fazer uma nova determinação sobre quando uma fórmula deve ser considerada incorreta. Em aritmética, por exemplo, posso fazer isto dizendo: uma fórmula deve ser considerada incorreta se a fórmula “0 ≠ 0” puder ser derivada dela. Só quero dizer: se você explicar as expressões “correto” e “incorreto” desta maneira, elas não se relacionam entre si como afirmação e negação. Pode muito bem ser que uma fórmula esteja certa e errada ao mesmo tempo. Isto significa apenas que a fórmula “0 ≠ 0” pode ser derivada das fórmulas básicas. - Pelo que vejo, é aqui que termina a analogia com o jogo de xadrez. A saber, só posso perguntar se um movimento foi correto, e em matemática isto corresponde à questão de saber se um passo da demonstração está correto. A aritmética, por outro lado, tem uma tarefa que o jogo de xadrez não conhece, a saber: verificar se uma fórmula está correta ou não.

WITTGENSTEIN: você está absolutamente certo de que precisamos determinar quando uma fórmula está incorreta. Mas se procedêssemos como você diz, usaríamos mal as palavras, porque “incorreto” é a negação de “correto”. Mas podemos nos ajudar muito facilmente usando outras expressões. Então ninguém pode se opor a que façamos essas determinações.

Então, como se começa a descobrir que uma fórmula está errada? Por exemplo, a fórmula 7 X 5 = 30? Como sabemos que se 7 x 5 = 3 5, então não é 31 também? O que faríamos se alguém dissesse: “8 x 7 = 75”? Diríamos: “Ora, o que você está fazendo aí? Isto está errado!”. Se ele nos respondesse agora: “Ué, por quê? Acabei de estipular desta forma”, então só poderíamos dizer a ele: “Bem, então você está empregando um cálculo diferente do usual, que é chamado de multiplicação. Não conhecemos o seu cálculo. Se procedermos segundo as regras que nos foram dadas, então 8 x 7 = 56, e não 7 5, e esta é a refutação.”

Se alguém disser que 8 x 7 = 75, então estará tão certo ou tão errado quanto estaria ao definir a palavra “mesa” de uma maneira completamente nova. A definição é certamente arbitrária. No entanto, pode-se dizer que uma definição está errada se não refletir o que ela realmente quer dizer. Neste sentido, a fórmula 8 x 7 = 75 também está errada.

⟨*Equação e Regra de Substituição II*⟩

WAISMANN PERGUNTA A WITTGENSTEIN: a equação tem um duplo significado em aritmética: ela é configuração e regra de substituição. Ora, o que aconteceria se fosse encontrada na aritmética ou no cálculo uma demonstração para a fórmula “0 ≠ 0” ? Teria então que ser dada uma interpretação completamente diferente para a aritmética; pois não teríamos mais o direito de interpretar a equação como uma regra de substituição. “0 não pode ser substituído por 0” não significaria nada. Um defensor de Hilbert poderia afinal dizer: aqui você pode ver o que a prova de consistência realmente faz. Esta prova deve nos mostrar que temos o direito de conceber a equação como uma regra de substituição.

WITTGENSTEIN: claro que não pode significar isso. Em primeiro lugar: como é que chegamos a poder conceber a equação uma regra de substituição? Bem, simplesmente porque a gramática da palavra “substituir” é a mesma que a gramática da equação. Portanto, há um pateht von vornherein zwischen den Ersetzungsregeln und den Gleichungen ein Parallelismus (beide sind z. B. transitiv). Stellen Sie sich vor, ich würde Ihnen sagen: »a ist nicht durch a ersetzbar«. Was würden Sie tun?

WAISMANN: Ich könnte mir darunter nichts denken, weil sich diese Aussage mit der Syntax des Wortes »ersetzen« nicht verträgt.

WITTGENSTEIN: Gut, Sie können sich darunter nichts denken, und zwar mit vollem Recht; denn Sie haben tatsächlich einen neuen Kalkül vor sich, den Sie noch nicht kennen. Wenn ich Ihnen den Kalkül erkläre, indem ich Ihnen die Regeln der Grammatik und der Anwendung angebe, dann verstehen Sie auch die Aussage »a ist nicht durch a ersetzbar«. Sie verstehen diese Aussage so lange nicht, als Sie noch auf dem Standpunkt des alten Kalküls stehen.

Wenn sich nun die Formel »$0 \neq 0$« beweisen ließe, so würde das nur heißen, daß wir zwei verschiedene Kalküle vor uns haben: einen Kalkül, der die Grammatik des Wortes »ersetzen« ist, und einen anderen, in dem sich die Formel »$0 \neq 0$« beweisen läßt. Diese zwei Kalküle würden dann nebeneinander bestehen. (?)[23]

Wenn man nun fragen wollte, ob sich denn nicht beweisen läßt, daß die Grammatik des Wortes »ersetzen« dieselbe ist wie die Grammatik der Gleichung, d. h., daß sich die Gleichung als Ersetzungsregel auffassen läßt, so müßte man erwidern: Von einem Beweis kann hier nicht die Rede sein. Denn wie sollte dann die Behauptung lauten, die bewiesen werden soll? Daß ich den Kalkül anwende, heißt doch nur, daß ich Regeln aufstelle, die mir sagen, was ich tue, wenn im Kalkül dies oder jenes herauskommt. Soll ich also beweisen, daß ich die Regeln aufgestellt habe? Denn etwas anderes kann doch nicht der Sinn der Frage sein, ob ich den Kalkül angewendet habe.

Ich habe einmal geschrieben:[24][25] Der Kalkül ist kein Begriff der Mathematik.

WAISMANN: Die Mathematik ist kein Begriff der Mathematik.

Indirekter Beweis I

WAISMANN: Sie sagten seinerzeit, daß im Kalkül überhaupt kein Widerspruch auftreten könne.[26] Wenn wir z. B. die Axiome der euklidischen Geometrie nehmen und als weiteres Axiom den Satz: »Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 181°«, so würde auch dadurch kein Widerspruch entstehen. Denn es könnte ja sein, daß die Winkelsumme zwei Werte hat, geradeso wie $\sqrt{4}$. Wenn man das nun so formuliert, dann verstehe ich nicht mehr, was der indirekte Beweis leistet. Denn der indirekte Beweis beruht ja gerade darauf, daß ein Widerspruch im Kalkül hergestellt wird. Wie ist es nun, wenn ich eine Annahme, die durch einen indirekten Beweis wider-

23. Dieses Fragezeichen weist nur darauf hin, dass Waismann nicht verstand, wie zwei Rechnungen nebeneinander existieren konnten, bei denen eine der Ersetzungsregel folgte und die andere, in der die Formel „$0 \neq 0$" demonstriert worden war, dieser nicht folgte. Wenn dies heute noch nicht so leicht vorstellbar ist, offensichtlich im Jahr 1931, als Gödels Unvollständigkeitssätze noch nicht bekannt waren und Hilberts Vorschlag, einen Algorithmus zu finden, der die Konsistenz und Vollständigkeit der Arithmetik nachweisen konnte, noch in Arbeit war war noch schwieriger. (A. U.)

24. In seinem MS Bd. VII (1931) und, später, in PhGr § 66 u. 109. (F. H.)

25. In aktueller Notation, die sich an von Wrights Klassifikation anlehnt, entspräche dies MS 111, S. 74, 79; TS 213, pp. 297, 539. (A. U.)

26. Siehe oben, S. 143 ff. (F. H.)

ralelismo entre as regras de substituição e as equações desde o início (ambas são, por exemplo, transitivas). Imagine se eu lhe dissesse: "a não pode ser substituído por a". O que você faria?

WAISMANN: Não poderia pensar em nada com isto, porque este enunciado é incompatível com a sintaxe da palavra "substituir".

WITTGENSTEIN: Muito bem, você não pode pensar em nada com isso, e você está totalmente correto; porque você realmente tem um novo cálculo diante de si que você ainda não conhece. Se eu explicar o cálculo a você fornecendo as regras gramaticais e de aplicação, então você também compreenderá o enunciado "a não pode ser substituído por a". Você não compreende esta afirmação enquanto você ainda está no ponto de vista do cálculo antigo.

Se a fórmula "$0 \neq 0$" pudesse então ser demonstrada, isto significaria apenas que temos dois cálculos diferentes diante de nós: um cálculo que está na gramática da palavra "substituir", e outro no qual a fórmula "$0 \neq 0$" pode ser demonstrada. Esses dois cálculos então coexistiriam. (?)[23]

Se alguém então quisesse perguntar se não pode ser provado que a gramática da palavra "substituir" é a mesma que a gramática da equação, ou seja, se a equação pode ser entendida como uma regra de substituição, haveria que responder: uma prova não pode ser uma questão aqui. Pois como deveria ser lida a afirmação a ser demonstrada? O fato de eu aplicar o cálculo significa apenas que estabeleço regras que me dizem o que fazer se isto ou aquilo sair do cálculo. Devo então demonstrar que estabeleci as regras? Porque outra coisa não pode ser o significado da questão de saber se apliquei o cálculo.

Certa vez escrevi:[24][25] O cálculo não é um conceito da matemática.

WAISMANN: a matemática não é um conceito da matemática.

Prova Indireta I

WAISMANN: você disse há um tempo atrás que não poderia haver nenhuma contradição no cálculo.[26] Se nós tomamos, por exemplo, os axiomas da geometria euclidiana, e, como axioma adicional, a proposição: "A soma dos ângulos no triângulo é de 181°", isto também não criaria uma contradição. Porque pode ser que a soma dos ângulos tenha dois valores, assim como $\sqrt{4}$. Bem, quando se formula assim, eu já não entendo mais o que a prova indireta faz. Porque a prova indireta se baseia justamente no fato de se estabelecer uma contradição no cálculo. O

23. Este ponto de interrogação apenas indica que Waismann não chegou a compreender como poderiam coexistir dois cálculos em que um deles seguisse a regra de substituição, e o outro, em que a fórmula "$0 \neq 0$" tivesse sido demonstrada, não a seguisse. Se hoje em dia isto ainda não é tão fácil de imaginar, evidentemente em 1931, quando ainda não se conheciam os teoremas da incompletude de Gödel e a proposta Hilbertiana de se encontrar um algoritmo que pudesse demonstrar a consistência e a completude da artimética ainda estava em pleno vigor e vigência, isto era ainda mais difícil. (N. T.)

24. No seu MS, vol. VII (1931) e, depois, em PG §§ 66 e 109. (N. E.)

25. Na notação atual, que segue a classificação de von Wright, isto corresponderia a MS 111, pp. 74, 79; TS 213, pp. 297, 539. (N. T.)

26. Ver acima, pp. 144ss. (N. E.)

legt ist, als Axiom ausspreche? Stellt dann nicht das so erweiterte Axiomensystem einen Widerspruch dar? Z.B.: In der euklidischen Geometrie wird bewiesen, daß man von einem Punkt auf eine Gerade nur *ein* Lot fällen kann, und zwar durch einen indirekten Beweis. Angenommen nämlich, es gäbe zwei Lote, dann würden diese ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln bilden, dessen Winkelsumme größer als 180° wäre, im Widerspruch mit dem bekannten Satz über die Winkelsumme. Wenn ich nun den Satz: »Es gibt zwei Lote« als Axiom aufstelle und den übrigen Axiomen der euklidischen Geometrie hinzufüge - erhalte ich da nicht einen Widerspruch?

WITTGENSTEIN: Durchaus nicht. Was ist der indirekte Beweis? Eine Handlung mit Zeichen. Aber das ist noch nicht alles. Es kommt jetzt noch eine weitere Regel hinzu, die mir sagt, was ich zu tun habe, wenn ein indirekter Beweis geführt ist. (Die Regel kann z.B. lauten: Wenn ein indirekter Beweis geführt ist, dann sollen die Annahmen, von denen der Beweis ausgeht, gestrichen werden.) *Hier ist nichts selbstverständlich. Alles muß ausdrücklich gesagt werden.* Daß man das so leicht unterläßt, hängt damit zusammen, daß man sich davon nicht frei machen kann, was die Worte »Widerspruch« etc. in der gewöhnlichen Sprache bedeuten.

Wenn ich nun das Axiom aufstelle: »Von einem Punkt aus lassen sich auf eine Gerade zwei Lote fällen«, so wird zwar in diesem Kalkül das Zeichenbild des indirekten Beweises enthalten sein.

[So sehen wir zwar auch in diesem Kalkül das Zeichenbild des indirekten Beweises.] Aber wir gebrauchen es nicht als solches.

Was würde dann geschehen, wenn wir ein solches Axiom aufstellen? »Ich würde zu einem Punkt kommen, wo ich nicht mehr weiter weiß.« Ganz recht! Sie wissen deshalb nicht weiter, weil Sie einen neuen Kalkül vor sich haben, den Sie noch nicht kennen. Was hier geschehen muß, ist folgendes: Es muß eine weitere Festsetzung getroffen werden, was zu tun ist, wenn ein solcher Beweis geführt ist.

WAISMANN: Aber das könnte man ja immer tun, wenn in einem normalen Kalkül ein indirekter Beweis geführt ist. Man könnte den widerlegten Satz halten, indem man die Bestimmung über den Gebrauch des indirekten Beweises ändert, und dann ist der Satz eben nicht mehr widerlegt.

WITTGENSTEIN: Natürlich können wir das. Wir haben dann eben den Charakter des indirekten Beweises vernichtet, und was vom indirekten Beweis noch da ist, ist das bloße Zeichenbild.

que aconteceria então se afirmo como um axioma uma suposição que é refutada por uma prova indireta? Este sistema de axiomas estendido não apresenta uma contradição? Por exemplo: na geometria euclidiana está demonstrado que só pode passar *uma* perpendicular por um ponto de uma linha reta, especificamente por uma prova indireta. Supondo que fossem duas perpendiculares, então estas formariam um triângulo com dois ângulos retos, a soma dos ângulos seria maior que 180 °, em contradição com o conhecido teorema sobre a soma dos ângulos. Se entretantoproposição: “Há duas perpendiculares” se estabelece como um axioma e se adiciona aos outros axiomas da geometria euclidiana - não fico com uma contradição?

WITTGENSTEIN: De forma alguma. O que é a prova indireta? Um ato realizado com sinais. Mas isto não é tudo. Acrescenta-se agora mais uma regra que me diz o que fazer quando uma prova indireta é introduzida. (A regra pode ser lida como por exemplo: se for introduzida uma prova indireta, então as suposições nas quais a prova se baseia devem ser excluídas.) *Nada pode ser tomado como autoevidente aqui. Tudo tem que ser dito explicitamente.* O fato de alguém negligenciar isto tão facilmente tem a ver com o fato de que a pessoa não se liberta do que as palavras “contradição” etc. significam na linguagem ordinária.

Se eu estabelecer o axioma: “Duas perpendiculares podem ser traçadas em um ponto sobre uma linha reta”, então a representação esquemática da prova indireta estará contida neste cálculo.

[Portanto, vemos a representação esquemática da prova indireta neste cálculo também.] Mas não a usamos como tal.

Então, o que aconteceria se estabelecêssemos este axioma? “Eu chegaria a um ponto em que não saberia mais o que fazer.” Isto mesmo! Você não saberia mais o que fazer porque haveria um novo cálculo à sua frente que você ainda não conhece. O que tem que acontecer aqui é o seguinte: tem-se que arranjar uma estipulação adicional para o que fazer se uma prova assim for introduzida.

WAISMANN: mas pode-se fazer isto sempre quando em um cálculo normal uma prova indireta é introduzida. A pessoa poderia reter a proposição refutada mudando a disposição sobre o uso da prova indireta, e então a proposição não é mais refutada.

WITTGENSTEIN: claro que podemos fazer isto. Assim, teríamos apenas destruido o caráter da prova indireta, e o que resta da prova indireta é a mera representação esquemática.

Mittwoch, 9. Dezember 1931 (*Neuwaldegg*)[27]

ÜBER DOGMATISMUS

An einer dogmatischen Darstellung kann man erstens aussetzen, daß sie gewissermaßen arrogant ist. Aber das ist noch nicht das Schlimmste. Viel gefährlicher ist ein anderer Irrtum, der auch mein ganzes Buch durchzieht, das ist die Auffassung, als gäbe es Fragen, auf die man später einmal eine Antwort finden werde. Man hat das Resultat zwar nicht, denkt aber, daß man den Weg habe, auf dem man es finden werde. So habe ich z. B. geglaubt, daß es die Aufgabe der logischen Analyse ist, die Elementarsätze aufzufinden. Ich schrieb : Über die Form der Elementarsätze kann man keine Angabe machen,[28] und das war auch ganz richtig. Mir war klar, daß es hier jedenfalls keine Hypothesen gibt und daß man bei diesen Fragen nicht etwa so vorgehen kann wie Carnap, indem man von vornherein annimmt, die Elementarsätze sollten aus zweistelligen Relationen bestehen etc.[29] Aber ich meinte doch, daß man später einmal die Elementarsätze würde angeben können. Erst in den letzteren Jahren habe ich mich von diesem Irrtum abgelöst. Ich habe seinerzeit in dem Manuskript meines Buches geschrieben (im Traktat nicht abgedruck:[30] Die Lösungen der philosophischen Fragen dürfen nie überraschen. Man kann in der Philosophie nichts entdecken. Ich hatte das aber selbst noch nicht klar genug verstanden und habe dagegen gefehlt.

Die falsche Auffassung, g egen die ich mich in diesem Zusammenhang kehren möchte, ist die, daß wir auf etwas kommen könnten, was wir heute noch nicht sehen , daß wir etwas ganz neues *finden* können. Das ist ein Irrtum. In Wahrheit haben wir schon alles, und zwar *gegenwärtig*, wir brauchen auf nichts zu warten. Wir bewegen uns im Bereich der Grammatik unserer gewöhnlichen Sprache, und diese Grammatik ist schon da. Wir haben also schon alles und brauchen nicht erst auf die Zukunft zu warten.

In bezug auf Ihre Thesen[31] habe ich einmal geschrieben:[32] Wenn es Thesen der Philosophie gäbe, so dürften sie zu keinen Diskussionen Anlaß geben. Sie müßten nämlich so abgefaßt sein, daß jedermann sagt: Ja, ja, das ist ja selbstverständlich. Solange man über eine Frage verschiedener Meinung sein und streiten kann, ist das ein Anzeichen dafür, daß man sich noch nicht genügend klar ausgedrückt hat. Hat man die vollkommen klare Formulierung, jene letzte

27. Siehe oben, S. 131 Anm (F. H.).
28. TLP 5,55. (F. H.)
29. Gemeint ist wohl *Der logische Aufbau der Welt*, Berlin, 1928. (F. H.)
30. Diese Bemerkung (oder Bemerkungen, sollten beide, die folgen, gemeint sein) kommt nicht in dem von Prof. G. H. von Wright neulich entdeckten Manuskript vom TLP vor. In 6,1251 sagt Wittgenstein: »Darum kann es in der Logik auch nie Überraschungen geben.« (Vgl. auch 6,1261). Das »auch« (eine Hinzufügung im MS) kann viel leichter verstanden werden, wenn wir annehmen, daß Wittgenstein die Absicht hatte die hier zitierte Bemerkung vorher im T LP einzuschließen. (F. H.)
31. Gedruckt als Anhang B. (F. H.)
32. Diese Bemerkung kommt nicht nur in Wittgensteins MS Bänden (worauf er hier wahrscheinlich hinweist), aber auch in PhGr § 89 und in PhU § 128 vor. (F. H.)

Quarta-Feira, 9 de Dezembro de 1931 (*Neuwaldegg*)[27]

SOBRE O DOGMATISMO

Em primeiro lugar, pode-se criticar uma apresentação dogmática pelo fato de ser até certo ponto arrogante. Mas isto não é o pior. Muito mais perigoso é outro erro que permeia todo o meu livro, ou seja, a concepção de que há questões para as quais uma resposta será encontrada mais tarde. Mesmo que não se tenha o resultado, imagina-se que se está de posse do caminho para encontrá-lo. Assim acreditava, por exemplo, que a tarefa da análise lógica é encontrar as proposições elementares. Eu escrevi: não se pode dar nenhuma informação sobre a forma das proposições elementares,[28] e isto estava totalmente correto. Estava claro para mim que não havia hipóteses aqui e que não se poderia proceder da mesma maneira que Carnap com essas questões, assumindo desde o início que as proposições elementares deveriam consistir em relações binárias etc.[29] No entanto, pensava que se poderia especificar posteriormente as proposições elementares. Foi apenas nos últimos anos que desisti deste erro. Na época, escrevi no manuscrito do meu livro (não impresso no Tractatus):[30] as soluções para as questões filosóficas nunca devem ser uma surpresa. Nada se pode descobrir na filosofia. No entanto, eu mesmo ainda não havia compreendido com clareza suficiente e, por outro lado, estava enganado.

A concepção equivocada, contra a qual gostaria de me voltar neste contexto, é a de que poderíamos apresentar algo que ainda não podemos ver hoje, que poderíamos *encontrar* algo completamente novo. Isto é um erro. Na verdade, já temos tudo, ou seja, *no tempo presente* não precisamos esperar por nada. Nos movemos no domínio da gramática da nossa linguagem ordinária, e esta gramática já está lá. Portanto, já temos tudo e não precisamos esperar pelo futuro.

A respeito das suas teses,[31] escrevi uma vez:[32] se houvesse teses de filosofia, elas não deveriam dar lugar a qualquer discussão. Teriam que ser escritas de forma que todos dissessem: sim, sim, isto é o óbvio. Na medida em que alguém pode ter uma opinião diferente e disputar sobre uma questão, isto é um sinal de que a pessoa ainda não se expressou com clareza suficiente. Uma vez que a formulação perfeitamente clara, a clareza final, tenha sido alcançada, não pode haver mais hesitação ou resistência; porque isto sempre surge do sentimento: algo foi afirmado agora, eu ainda não sei se devo admiti-lo ou não. Se, por outro lado, alguém torna a gramática clara

27. Ver nota de rodape na p. 132, acima.(N. E.)
28. TLP 5,55. (N. E.)
29. Provavelmente a referência é a *Der logische Aufbau der Welt*, Berlin, 1928. (N. E.)
30. Esta observação (ou observações, se as duas seguintes estiverem incluídas) não aparece no manuscrito prévio ao *Tractatus* recentemente descoberto pelo Prf. G. H. von Wright. Em 6,1251, Wittgenstein diz: "É por isto que também nunca pode haver surpresas na lógica" (cf. também 6,1261). O "também" (um acréscimo no MS) pode ser compreendido muito mais facilmente se assumirmos que Wittgenstein tinha a intenção de antepor no TLP a observação aqui citada. (N. E.)
31. Publicado como Anexo B, ao final. (N. E.)
32. Estas observações não ocorrem apenas nos volumes manuscritos de Wittgenstein (aos quais ele provavelmente se refere aqui), mas também em PG § 89 e nas IF § 128. (N. E.)

Klarheit, errecht, so kann es kein Bedenken und kein Sträuben mehr geben; denn dieses entsteht ja immer aus dem Gefül: Jetzt wurde etwas behauptet, ich weiß noch nicht, soll ich das zugeben oder nicht. Macht man sich dagegen die Grammatik klar, indem man in ganz kleinen Schritten vorgeht, wobei jeder einzlne Schritt vollkommen selbstverständlich wird, so kann überhaupt keine Diskussion entstehen. Der Streit entst eht immer dadurch, daß man gewisse Schritte überspringt oder nicht deutlich ausspricht, so daß es den Anschein gewinnt, als hätte man nur eine Behauptung aufgestellt, über die man streiten kann . Ich habe einmal geschrieben: Die einzig richtige Methode des Philosophier ens bestünde darin, nichts zu sagen und es dem andern zu überlassen, etwas zu behaupten.[33] Daran halte ich mich jetzt. Was der andere nicht kann, das ist, die Regeln schrittweise und in der richtigen Ordnung auseinanderzusetzen, so daß sich alle Fragen von selbst auflösen.[34]

Was ich damit meine, ist folgendes: Wenn wir z. B. von Negationen sprechen, handelt es sich darum, die Regel »~~p = p« anzugeben. Ich behaupte nichts. Ich sage nur: Die Grammatik von » ~ « ist so eingerichtet, daß » ~ ~p « durch »p« ersetzt werden darf. Hast du das Wort »nicht« auch so gebraucht? Ist das zugegeben, so ist alles erledigt. So verhält es sich überhaupt in der Grammatik. Wir können nichts anderes tun, als *Regeln tabulieren*. Habe ich etwa durch Befragen festgestellt, daß der andere für ein Wort bald diese, bald jene Regeln anerkennt, so sage ich ihm: Dann mußt du also genau unterscheiden, *wie* du es gebrauchst; *und mehr habe ich nicht sagen wollen*.

In meinem Buch bin ich noch dogmatisch verfahren. Ein solches Verfahren ist nur dann berechtigt, wenn es sich darum handelt, gewissermaßen die physiognomischen Züge dessen, was man gerade noch erkennen kann, festzuhalten, und das ist meine Entschuldigung. Ich sah aus der Ferne etwas in sehr unbestimmter Weise und wollte möglichst viel heraussaugen. Aber ein zweiter Aufguß solcher Thesen hat keine Berechtigung mehr.

WAISMANN: Ich habe früher auch anders gedacht. Mein Fehler war der, daß ich meinte, die Aufgabe der logischen Analyse der Sprache sei es, gewissermaßen die allgemeinsten Züge der Wirklichkeit zu beschreiben, diejenigen, welche der Sprache und der Welt gemeinsam sind und welche überhaupt erst den Ausdruck von Gedanken erlauben. Wenn ich z. B. sage: Jeder Sachverhalt ist komplex, so klingt das ganz so wie eine allgemeine Naturbeschreibung. Jetzt habe ich eingesehen, daß man besser tut, dergleichen Sätze überhaupt nicht auszusprechen, sondern lieber ganz im Bereich der Grammatik zu bleiben. Ein anderes Beispiel dafür ist etwa die Behauptung, daß eine Farbe nie allein auftrete, sondern immer in einem System. So ausgesprochen, sieht das wieder so aus, als würde da etwas vor aller Erfahrung über die Wirklichkeit ausgesagt, während es sich tatsächlich nur um unsere Symbole handelt. (?) Dieselbe Schwierigkeit verspürt man, wenn man etwa von dem Zusammenhang zwischen Sprache und Welt redet und unklar war, daß der Satz ein logisches Bild der Tatsache ist. Man ist dann versucht zu sagen: Logik durchdringt die Welt, und das ist Metaphysik.

WITTGENSTEIN: Das läßt sich sehr einfach aufklären. Als ich schrieb: »Der Satz ist ein logisches Bild der Tatsache«,[35] so meinte ich: ich kann in einen Satz ein Bild einfügen, und zwar

---

33. TLP 6,53, ungefähr. (F. H.)
34. Der Unterschied zwischen der hier vorgestellten philosophischen Methode, die immer noch der des TLP ähnelt, und der, die Wittgenstein in den folgenden Jahren zu übernehmen begann, besteht darin, dass die Probleme von selbst durch die gewöhnliche Sprache gelöst werden, anstatt durch die Vorschläge von Wissenschaft. (A. U.)
35. Nirgendwo genau, aber vgl. TLP 3, 4,01, 4,03. (F. H.)

para si mesmo, procedendo em passos muito pequenos, em que cada um deles se torna completamente autoevidente, então nenhuma discussão pode surgir. A controvérsia sempre surge ao pular certas etapas ou de não expressá-las claramente, de modo que parece que alguém fez apenas uma afirmação sobre a qual se pode disputar. Certa vez, escrevi: o único método correto de filosofia consiste em nada dizer, e deixar que o outro afirme alguma coisa.[33] Estou aderindo a isto agora. O que o outro não pode fazer é abordar as regras passo a passo e na ordem certa para que todas as questões se resolvam sozinhas.[34]

O que quero dizer com isto é o seguinte: se falamos de negações, por exemplo, trata-se de especificar a regra de "~~ p = p". Eu não afirmo nada. Só estou dizendo: a gramática de "~" está configurada de tal forma que "~ ~ p" pode ser substituído por "p". Não foi assim que você usou a palavra "não"? Se isto for admitido, tudo está feito. É assim que afinal ocorre na gramática. Tudo o que podemos fazer é *tabular as regras*. Se, por exemplo, estabeleci por meio de questionamentos que a outra pessoa reconhece ora estas regras, ora aquelas regras para uma palavra, então lhe digo: então você deve distinguir exatamente *como* você a usa; *e não há nada mais que queira dizer*.

Eu ainda procedia dogmaticamente em meu livro. Tal procedimento só se justifica se se tratar de estabelecer, por assim dizer, os traços fisiognômicos do que agora podemos reconhecer, e esta é a minha desculpa. De longe via algo de uma forma muito vaga e queria extrair o máximo possível. Mas uma segunda infusão de tais teses não se justifica mais.

WAISMANN: eu também pensava antes de forma diferente. Meu erro foi acreditar que a tarefa da análise lógica da linguagem era descrever, por assim dizer, as características mais gerais da realidade, aquelas que a linguagem e o mundo têm em comum e que permitem a expressão de pensamentos em primeiro lugar. Se digo, por exemplo: todo estado de coisas é complexo, então parece uma descrição geral da natureza. Agora eu vi que é melhor não pronunciar mais sentenças assim, mas sim permanecer inteiramente no domínio da gramática. Outro exemplo disto é a afirmação de que uma cor nunca aparece sozinha, mas sempre em um sistema. Expresso desta forma, parece mais uma vez que algo está sendo dito sobre a realidade antes de toda experiência, quando na verdade se trata apenas de nossos símbolos. (?) Sente-se a mesma dificuldade quando se fala sobre a conexão entre a linguagem e o mundo, e não ficava claro que a proposição é uma figuração lógica do fato. Ficamos então tentados a dizer: a lógica permeia o mundo, e isto é metafísica.

WITTGENSTEIN: Isto pode ser explicado muito facilmente. Quando escrevi: "A proposição é uma figuração lógica do fato",[35] quis dizer: posso inserir uma imagem em uma proposição, ou seja, uma imagem desenhada, e depois continuar com a proposição. Posso, portanto, usar uma imagem como uma proposição. Como isto é possível? A resposta é: porque justamente ambos concordam em um certo aspecto, e chamo o que há de comum de *imagem*. A expressão "imagem" já é tomada em um sentido mais amplo. Eu herdei este conceito de imagem de dois lados: primeiro da imagem desenhada, e depois da imagem do matemático, que já é um conceito geral.

---

33. Aproximadamente o que está no TLP 6,53. (N. E.)
34. O método filosófico aqui exposto é de que as questões se resolvem sozinhas pela linguagem ordinária, em vez de serem dissolvidas pelas proposições da ciência, tal como se preconiza no TLP § 6.53. A esta altura Wittgenstein já tinha vislumbrado o método de apresentação panorâmica, atualmente publicado em ORD, mas que já tinha sido redigido no MS 110, p. 257 (cf. IF § 122). (N. T.)
35. Em nenhum lugar exatamente, mas veja TLP 3; 4.01; 4.03. (N. E.)

ein gezeichnetes Bild, und dann im Satz fortfahren. Ich kann also ein Bild wie einen Satz gebrauchen. Wie ist das möglich? Die Antwort lautet: Weil eben beide in einer gewissen Hinsicht übereinstimmen, und dieses Gemeinsame nenne ich *Bild*. Der Ausdruck »Bild« ist dabei schon in einem erweiterten Sinn genommen. Diesen Begriff des Bildes habe ich von zwei Seiten geerbt: erstens von dem gezeichneten Bild, zweitens von dem Bild des Mathematikers, das schon ein allgemeiner Begriff ist. Denn der Mathematiker spricht ja auch dort von Abbildung, wo der Maler diesen Ausdruck nicht verwenden würde.

Das Wort »Bild« hat etwas Gutes: Es hat mir und vielen andern geholfen, etwas klar zu machen, indem es auf etwas Gemeinsames hinweist und zeigt: Also darauf kommt es an! Wir haben dann das Gefühl: Aha! Jetzt verstehe ich: Satz und Bild sind also von der gleichen Art.

Ich könnte auch einen Maßstab als Symbol benutzen, d. h. einen Maßstab in eine Beschreibung einfügen und so verwenden wie einen Satz. Ja, man kann sogar sagen: In vieler Hinsicht verhält sich ein Satz ganz so wie ein Maßstab, und ich hätte daher ebenso gut den Satz einen Maßstab nennen können. (Z. B. legen wir in einer Farbaussage den ganzen Farbmaßstab an die Wirklichkeit an.)[36]

Als mir das Gemeinsame von Satz und Bild zum ersten Mal klar wurde, habe ich in immer neuen Wendungen darauf hingewiesen und den Satz mit einem lebenden Bild verglichen,[37] ein andermal mit einem Modell,[38] oder ich sagte: Der Satz stellt dar,[39] er zeigt,[40] wie es sich verhält usw.

Den Unterschied zwischen einem dogmatischen und einem undogmatischen Verfahren möchte ich durch ein Beispiel andeuten. Ich rede zuerst dogmatisch und werde dann undogmatisch sprechen. Ich sage also: Wird ein Satz auf zwei verschiedene Arten verifiziert, so hat er in beiden Fällen einen verschiedenen Sinn. Das klingt noch immer merkwürdig und kann zu Widerspruch Anlaß geben. Denn es könnte jemand sagen: Ich sehe gar nicht ein, warum der Satz dann einen verschiedenen Sinn haben soll und warum nicht derselbe Satz auf zwei ganz verschiedene Arten verifiziert werden kann. Nun drücke ich mich aber undogmatisch aus und mache einfach auf folgendes aufmerksam: Die Verifikation eines Satzes ist ja wieder nur durch eine Beschreibung gegeben. Der Tatbestand ist also der: Wir haben zwei Sätze. Der zweite Satz beschreibt die Verifikation des ersten Satzes. Was tue ich also? Ich stelle einfach als Regel der Grammatik auf, daß der erste Satz aus dem zweiten folgen soll. Ich spreche also gar nicht von Sinn und was der Sinn ist, sondern ich bleibe ganz innerhalb der Grammatik. Wenn man nun sagt: Ein Satz hat zwei verschiedene Verifikationen, so mache ich darauf aufmerksam: Diese Verifikationen werden durch verschiedene Sätze beschrieben; wir sind also, wenn wir denselben Satz ableiten, *nach verschiedenen Regeln vorgegangen; und mehr wollte ich nicht sagen*.

Ich mache also den andern nur darauf aufmerksam, was er eigentlich tut, und enthalte mich einer jeden Behauptung. Alles muß sich dann in der Grammatik abspielen.

Es handelt sich darum, wesentliche, grundsätzliche Unterscheidungen zu machen.[41]

36. Ein Bild wird mit einem Maßstab verglichen in TLP 2, 1512 und ein Satz in Nb 1914-16, S. 32. Aber diese frühere Stellen zeigen keine Spuren von der Jdee eines Satzsystems wie auf S. 55 ff. oben. (F. H.)

37. TLP 4,0311. (F. H.)

38. TLP 4,01, 4,04, 4,463 . (F. H.)

39. »Darstellen« kommt oft im hier verlangten Sinn vor, aber nie mit »wie es sich verhält« als Objekt. Vgl. z. B . TLP 2,0231, 4,021, 4,031, 4,1. (F. H.)

40. TLP 4,022 »Der Satz *zeigt* wie es sich verhält, *wenn* er wahr ist. Und er sagt, daß es sich so verhält.« (F. H.)

41. Beachten Sie, dass der große Unterschied zwischen der dogmatischen und der nicht-dogmatischen Periode der Vergleichsparameter ist. Es ist zu sehen, dass es in der neuen Periode die Grammatik der gewöhnlichen Sprache ist, d. h., die Modifikation erfolgte in Bezug auf den Parameter, der unsere reale und zeitliche Praxis tatsächlich beschreibt. Es

Porque o matemático também fala de figuração onde o pintor não empregaria esta expressão.

Há algo de bom na palavra “imagem”: ajudou a mim e a muitos outros a deixar algo claro, apontando algo em comum e mostrando: então é isto o que conta! Temos então o sentimento: Aha! Agora compreendo: a proposição e a imagem são, portanto, do mesmo tipo.

Eu também poderia usar uma régua como símbolo; isto é, insirir uma régua em uma descrição e empregá-la como uma proposição. Sim, pode-se até dizer: em muitos aspectos, uma proposição se comporta exatamente como um padrão de medida, e eu poderia facilmente ter chamado a proposição de régua. (Por exemplo, em um enunciado sobre cores, acomodamos toda a escala de cores à realidade.)[36]

Quando a comunalidade entre a proposição e a imagem ficou clara para mim pela primeira vez, eu a assinalei em locuções sempre novas e comparei a proposição com uma imagem viva,[37] numa outra vez com um modelo,[38] ou disse: a proposição apresenta,[39] mostra,[40] como as coisas estão etc.

Gostaria de indicar a diferença entre um procedimento dogmático e um não dogmático por meio de um exemplo. Eu falo dogmaticamente primeiro e então falarei não dogmaticamente. Assim, digo: se uma proposição é verificada de duas maneiras diferentes, ela tem sentido diferente nos dois casos. Isto ainda parece estranho e pode dar origem a contradições. Pois alguém poderia dizer: não vejo por que a proposição deveria ter um sentido diferente e por que a mesma proposição não poderia ser verificada de duas maneiras completamente diferentes. Mas agora eu me expresso de forma não dogmática e simplesmente chamo sua atenção para o seguinte: a verificação de uma proposição só é dada novamente por uma descrição. Portanto, a questão é esta: temos duas proposições. A segunda proposição descreve a verificação da primeira. Então o que estou fazendo? Acabei de estabelecer como regra gramatical que a primeira proposição deve seguir-se da segunda. Portanto, não estou falando sobre o sentido e qual é o sentido, mas permaneço inteiramente dentro da gramática. Se alguém disser agora: uma proposição tem duas verificações diferentes, chamo sua atenção para isto: estas verificações são descritas por proposições diferentes; portanto, quando derivamos a mesma proposição, *procedemos de acordo com regras diferentes; e não quero dizer mais nada*.

Portanto, apenas chamo a atenção da outra pessoa para o que ela está realmente fazendo e me abstenho de fazer qualquer afirmação. Tudo tem que ser jogado dentro da gramática.

É uma questão de fazer distinções essenciais e fundamentais.[41]

36. Uma imagem é comparada com uma régua no TLP 2.1512 e numa sentença de NB 1914-1916, p. 32. Mas essas passagens anteriores não mostram traços da ideia de um sistema de proposições, tal como na pp. 56ss, acima. (N. E.)

37. TLP 4.0311. (N. E.)

38. TLP 4.01; 4.04; 4.463 . (N. E.)

39. “Apresentar” freqüentemente ocorre no sentido exigido aqui, mas nunca com “como as coisas estão” como objeto. Veja, por exemplo, TLP 2.0231, 4.021, 4.031, 4.1. (N.E.)

40. TLP 4.022: “A proposição *mostra* como as coisas estão quando é verdadeira. E diz que estão assim”. (N. E.)

41. Nota-se que a grande diferença entre o período dogmático e o não dogmático é o parâmetro de comparação. Vê-se que no novo período é a gramática da linguagem ordinária, ou seja, a modificação ocorreu em relação ao parâmetro que realmente descreve a nossa prática real e temporal. Não é mais o lógico, no sentido do atomismo lógico, mas o gramatical, no sentido praxiológico. (N. T.)

ÜBER DAS UNENDLICHE

WAISMANN: Ein Beispiel für die Verwechslung des logischen mit dem empirischen Gesichtspunkt ist z. B. eine Ansicht, die Hahn öfter äußert, daß es nämlich nur in der zufälligen psychologischen Konstitution unseres Bewußtseins liegt, daß unser Denken finit ist.[42] Hahn meint: An sich könnte es ja auch sein Bewußtsein geben, das unendlich viele Gedanken zu denken vermag. Ich stelle mir etwa ein Bewußtsein vor, das zum ersten Gedanken eine halbe Minute braucht, zum zweiten Gedanken eine viertel Minute und so weiter. Nach Ablauf von einer Minute hat dieses Wesen unendlich viele Gedanken gedacht - daß es nicht so ist, zeigt doch nur die Erfahrung. Was darauf zu sagen ist, ist klar: Wir können ja ein solches Bewußtsein gar nicht beschreiben.

WITTGENSTEIN: Auch das wäre möglich. Man muß nur auf das eingehen, was Hahn meint, und sich alles genau ausmalen. Ich würde fragen: Wie stellen wir denn fest, ob ein Wesen ein solches Bewußtsein hat? Was ist das Kriterium dafür? Dann werden wir sehen, was die Aussage bedeutet. Nehmen wir ein anderes Beispiel! (Daß wir das Beispiel wechseln, macht nichts; denn der Unterschied der Grammatik verpflanzt sich auf jedes andere Beispiel.) Was heißt es z. B., eine Schnur sei unendlich lang? Heißt das so viel wie: Ich kann nicht bis ans Ende gehen? Das kann es nicht heißen. Machen wir uns die Sache an folgendem Beispiel klar![43]

Gesetzt, jemand behauptet: Ich kann mir ganz gut eine Telegraphenstange denken, die unendlich hoch ist. Nun gut, ich frage ihn: Wie verifizierst du das? Zunächst einmal: Wie verifizierst du, daß sie 10 m lang ist? »Ich messe mit einem Maßstab nach.« Und wie verifizierst du, daß sie 100 m lang ist? »Ebenso.« Ich weiß also jetzt, was das Kriterium dafür ist, daß sie n Meter lang ist. Nun frage ich: Was ist das Kriterium dafür, daß sie unendlich lang ist? Auch das Anlegen eines Maßstabes? »Das kann es nicht heißen.« Aha! Dann ist ja das Kriterium gar nicht mehr von endlicher Art, und dann ist schon eines klar: Das Wort »unendlich« hat jedenfalls eine andere Grammatik als ein Zahlwort. Wie wird also die Aussage verifiziert? Nun, da sind wieder verschiedene Möglichkeiten denkbar. Eine Möglichkeit ist z. B. die: Ich finde empirisch ein Gesetz und bemerke nun, daß ich die Tatsachen um so genauer mittels dieses Gesetzes beschreiben kann, je länger ich die Telegraphenstange annehme. Ich werde dann sagen: Ich mache die Hypothese, daß die Telegraphenstange unendlich lang ist, denn dann habe ich die Erfahrungen auf Grund des Gesetzes genau wiedergegeben.

Das Wort »unendlich« kann nun wieder *verschiedene* Bedeutungen haben. Es verhält sich damit genau so wie etwa mit der Frage, ob es nur *eine* Art von reellen Zahlen gibt. Ich würde sagen: Es gibt sehr verschiedene Arten von reellen Zahlen, weil es verschiedene grammatikalische Regeln gibt. Die Brouwerschen Zahlen[44] z. B. sind von ganz anderer Art, weil die Grammatik

---

ist nicht mehr das logische im Sinne des logischen Atomismus, sondern das grammatische im praxiologischen Sinne. (A. U.)

42. Wahrscheinlich in mündlichen Diskussionen. Auf ähnlichen Überlegungen beruht zum Teil Brouwers Beweis der Möglichkeit der (einer) Einteilung eines Kartenblattes in drei Länder, bei der in jedem Grenzpunkte alle drei Länder aneinander grenzen. Dieser Beweis wurde von Hahn in *Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften* (verschiedene Verfasser), Wien, 1933, S. 54-56 ausgelegt. (F. H.)

43. Wittgenstein zeigt hier, wie sich die Therapie auf die Worte konzentriert, der (die) Patient(in) selbst verwendet, um zu verbalisieren, was er (sie) sagen möchte. (A. U.)

44. Siehe oben, S. 53 Anm. (F. H.)

SOBRE O INFINITO

WAISMANN: Um exemplo da confusão do ponto de vista lógico com o empírico é, por exemplo, uma visão que Hahn freqüentemente expressa, a saber, que é apenas na constituição psicológica acidental de nossa consciência que nosso pensamento é finito.[42] Hahn pensa: em si mesmo também pode haver consciência capaz de pensar um número infinito de pensamentos. Imagino uma consciência que leva meio minuto para o primeiro pensamento, um quarto de minuto para o segundo pensamento, e assim por diante. Depois de um minuto, esse ser pensou um número infinito de pensamentos - que não é assim, só a experiência mostra. O que deve ser dito sobre isto é claro: não podemos descrever tal consciência de forma alguma.

WITTGENSTEIN: Isto também seria possível. Só se tem que se enfronhar no que Hahn quer dizer, e redesenhar tudo por si mesmo. Eu perguntaria: como estabelecemos que um ser possui tal consciência? Qual é o critério para isto? Então, veremos o que o enunciado significa. Tomemos um outro exemplo! (Não importa que mudemos o exemplo, porque a diferença na gramática é transplantada para todos os outros exemplos.) O que significa, por exemplo, que uma corda seja infinitamente longa? Significa tanto como: não posso chegar até o fim? Isto não pode ser chamado assim. Vamos deixar as coisas claras com o seguinte exemplo![43]

Suponha que alguém afirme: posso imaginar perfeitamente um poste telegráfico infinitamente alto. Bem, eu pergunto a ele: como você verifica isto? Em primeiro lugar, como você verifica se ele tem 10 metros de comprimento? “Vou medir com uma trena.” E como você verifica se ele tem 100 metros de comprimento? “Da mesma forma.” Então agora eu sei qual é o critério para ter n metros de comprimento. Agora pergunto: qual é o critério para que seja infinitamente longo? Também está criando um parâmetro? “Isto não pode ser chamado deste jeito.” Aha! Então o critério não é mais finito, e então uma coisa fica clara: a palavra “infinito” tem uma gramática diferente de uma palavra numérica. Então, como o enunciado é verificado? Bem, novamente existem diferentes possibilidades concebíveis. Uma possibilidade é, por exemplo: encontro uma lei empiricamente, e agora observo que, quanto mais alta admito ser a altura do poste telegráfico, mais precisamente posso descrever os fatos por meio desta lei. Direi então: faço a hipótese de que o poste telegráfico é infinitamente longo, porque então reproduzirei exatamente as experiências com base na lei.

A palavra “infinito” pode novamente ter significados *diferentes*. É exatamente o mesmo que acontece com a questão de saber se existe apenas *um* tipo de número real. Eu diria que existem tipos muito diferentes de números reais porque existem diferentes regras gramaticais. Os números de Brouwer,[44] por exemplo, são de um tipo completamente diferente porque a gramática de “>”, “=”, “<” é diferente para eles. Também se pode perguntar: os números complexos ainda são números? Eu posso admitir isto. O que faço com isto é o seguinte: estou apontando fortemente para o que é comum nas gramáticas dos números naturais, números racionais, números reais e números complexos. (Eu também poderia levar o que temos em comum de forma tão

---

42. Provavelmente em discussões orais. A prova de Brouwer da possibilidade de dividir uma folha de mapa em três países é baseada em parte em considerações semelhantes, nas quais os três países fazem fronteira entre si em cada ponto de fronteira. Esta prova foi interpretada por Hahn em *Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften* (diferentes autores), Viena, 1933, pp. 54-56. (N. E.)

43. Wittgenstein demonstra aqui como a terapia incide sobre as palavras que o(a) próprio(a) paciente utiliza para verbalizar o que quer dizer. (N. T.)

44. Ver acima, a nota de rodapé da p. 54. (N. E.)

von »> « , »=«, »<« für sie eine andere ist. Man könnte auch fragen: Sind die komplexen Zahlen noch Zahlen? Ich kann das annehmen. Was ich damit tue, ist folgendes: Ich weise damit sehr stark auf das Gemeinsame in den Grammatiken der natürlichen Zahlen, der rationalen Zahlen, der reellen Zahlen und der komplexen Zahlen hin. (Ich könnte das Gemeinsame auch so weit fassen, daß ich z. B. einen *Satz* eine *Zahl* nenne, weil man mit ihm kalkulieren kann, weil es z.B. hier auch Summen und Produkte gibt.) Aber ich laufe Gefahr, darüber die Unterschiede zu vergessen. Und das ist die Gefahr der heutigen Mathematik, welche die Unterschiede zu nivellieren und alles gleich zu machen sucht. Ich bemühe mich im Gegenteil, die *Verschiedenheit* der grammatikalischen Regeln zu betonen.

ÜBER RAMSEYS DEFINITION DER IDENTITÄT[45][46]

45. Anscheinend eine Kritik eines Vortrags von 1925, in *Foundations of Mathematics*, London 1931, S. 53 neugedruckt. Die unter dem Striche gedruckten Auszüge von Briefen zeigen ein früheres Stadium der Diskussion. Es scheint, daß Wittgenteins Ansichten von Schlick und Waismann an Ramsey geschickt (daher der vorhandene Durchschlag unter Waismanns Papieren) und vielleicht von ihnen übersetzt worden sind. Ramsey antwortete Schlick, der (im oben gedruckten und sich im Besitz des Professor H. Hänsel befindenden Brief) die Antwort am Wittgenstein weitergab. Nachher, im Oktober 1927, besuchte Schlick Cambridge und traf zweifellos Ramsey. (F. H.)

46. WITTGENSTEIN AN RAMSEY : *Auszug aus einem Brief von Juni 1927.*

You define »x = y« by

$$(\varphi_e) \,.\, \varphi_e x \equiv \varphi_e y.$$

Q (x, y)

The ground of this definition should be that »Q(x, y) « is a tautology whenever »x « and »y« have the same rneaning, and a contradiction, when they have different meanings.

I will now try to show that this definition won't do nor any other that tries to make »x = y« a tautology or a contradiction.

lt is clear that »Q(x, y)« is a logical product. Let »a« and »b« be two names having different rneanings. Then amongst the members of our product there will be one such that »f(a) « means »p« and »f(b) « means »~p«. Let me call such a function a critical function »f_k«. Now although we know that »a« and »b« have different meanings, still to say that they have not, cannot be nonsensical. For if it were, the negative proposition, i. e. that they have the same meaning, would be nonsensical too, *for the negation of nonsense is nonsense.* Now let us suppose, wrongly, that a = b, then, by substituting »a« for »b« in our logical product the critical function »f_k(a) « becomes nonsensical (ambiguous) and, consequently, the whole product, too. On the other hand, let »c« and »d« be two names having the same meaning, then it is quite true that »Q(c, d)« becomes a tautology. But suppose now (wrongly) c ≠ d. » Q(c, d)« is a tautology still, for there is no critical function in our product. And even if it could be supposed (which it cannot) that c ≠ d, surely a critical funktion f_k (such that »f_k(c)« means »p« »f_k(d)« means »~p «) cannot be supposed to exist, because this sign becomes meaningless. Therefore, if »x = y« were a tautology or a contradiction and correctly defined by » Q(x, y) « , » Q(a, b)« would not be contradictory, but nonsensical (as this supposition, if it were the supposition that »a« and »b« had the same meaning, would make the critical function nonsensical). And therefore » ~Q(a, b)« would be nonsensical too, for the negation of nonsense is nonsense.

In the case of c and d »Q(c, d)« remains tautologous, even if c and d could be supposed to be different (for in this case a critical function cannot be supposed to exist).

The way out of all these troubles is to see that neither »Q(x, y)«, although it is a very interesting function, nor any propositional function whatever, can be substituted for »x = y« .

Your mistake becomes still clearer in its consequences; viz. when you try to say, »There is an individual«. You are aware of the fact that the supposition of there being no individual makes

$$(\exists x) \,.\, x = x$$

E

»absolute nonsense«. But if »E« is to say »There is an individual« »~E« says: »There is no individual« . Therefore from » ~E« follows that »E« is nonsense. Therefore » ~E« must be nonsense itself, and therefore again so must be »E«.

The case lies as before. »E«, according to your definition of the sign »=«, may be a tautology right enough, but does

ampla que, por exemplo, chamo uma *proposição* de *número* porque se pode calcular com ela, por exemplo, porque também existem somas e produtos aqui.) Mas corro o risco de esquecer as diferenças. E este é o perigo da matemática de hoje, que tenta nivelar as diferenças e fazer tudo igual. Eu me esforço no sentido oposto, tento enfatizar a *diferença* nas regras gramaticais.

SOBRE A DEFINIÇÃO DE IDENTIDADE DE RAMSEY[45][46]

45. Aparentemente, uma revisão de uma palestra de 1925, reimpressa em *Foundations of Mathematics*, Londres, 1931, p. 53. Os trechos das cartas impressas abaixo da linha mostram um estágio anterior da discussão. Parece que as opiniões de Wittgenstein foram enviadas a Ramsey por Schlick e Waismann (daí a cópia carbono existente sob os papéis de Waismann), e podem ter sido traduzidas por eles. Ramsey respondeu a Schlick que (na carta impressa acima e em poder do professor H. Hänsel) passou a resposta a Wittgenstein. Posteriormente, em outubro de 1927, Schlick visitou Cambridge e sem dúvida encontrou Ramsey. (N. E.)

46. . WITTGENSTEIN PARA RAMSEY: *Trecho de uma carta de junho de 1927.*

Você define "x = y" por

$$(\varphi_e) \,.\, \varphi_e x \equiv \varphi_e y.$$

Q (x, y)

O fundamento desta definição deve ser que "Q (x, y)" é uma tautologia sempre que "x" e "y" têm o mesmo significado, e uma contradição, quando têm significados diferentes.

Tentarei agora mostrar que esta definição não servirá em nenhuma outra que tente fazer de "x = y" uma tautologia ou uma contradição.

É claro que "Q (x, y)" é um produto lógico. Sejam "a" e "b" dois nomes com diferentes significados. Então, entre os membros do nosso produto, haverá um tal que "f(a)" significa "p" e "f (b)" significa "~ p". Deixe-me chamar esta função de função crítica "f_k". Agora, embora saibamos que "a" e "b" têm significados diferentes, ainda assim dizer que não têm não pode ser absurdo. Pois se o fosse, a proposição negativa, isto é, que eles tenham o mesmo significado, seria um contrassenso também, pois a negação do contrassenso é um contrassenso. Agora vamos supor, erroneamente, que a = b, então, ao substituir "a" por "b" em nosso produto lógico, a função crítica "f_k(a)" torna-se um contrassenso (ambígua) e, conseqüentemente, todo o produto também. Por outro lado, sejam "c" e "d" dois nomes com o mesmo significado, então é bem verdade que "Q (c, d)" se torna uma tautologia. Mas suponha agora (erroneamente) c ≠ d. "Q (c, d)" ainda é uma tautologia, pois não há função crítica em nosso produto. E mesmo que pudesse ser suposto (o que não pode) que c ≠ d, certamente uma função crítica f_k (tal que "f_k (c)" significa "p" "f_k (d)" significa "~ p") não pode ser suposta como existente, porque este signo perderia o sentido. Portanto, se "x = y" fosse uma tautologia ou uma contradição, e corretamente definida por "Q (x, y)", "Q (a, b)" não seria contraditório, mas um contrassenso (tal como esta suposição, se fosse a suposição de que "a" e "b" tivessem o mesmo significado, tornaria a função crítica um contrassenso). E, portanto, "~ Q (a, b)" também seria um contrassenso, pois a negação do contrassenso é um contrassenso.

No caso de c e d, "Q (c, d)" permanece tautológico, mesmo se c e d pudessem ser supostamente diferentes (pois, neste caso, não se pode supor que exista uma função crítica).

A saída para todos estes problemas é ver que nem "Q (x, y)", embora seja uma função muito interessante, nem qualquer função proposicional, pode ser substituída por "x = y".

Seu erro se torna ainda mais claro em suas consequências; a saber, quando você tenta dizer: "Existe um indivíduo". Você está ciente do fato de que a suposição de não haver nenhum indivíduo torna

$$(\exists x).\, x = x$$

E.

um "absoluto contrassenso". Mas se "E" quer dizer "Existe um indivíduo", "~ E" diz: "Não existe um indivíduo". Portanto, de "~ E" segue-se que "E" é um contrassenso. Portanto, "~ E" deve ser um contrassenso em si e, portanto, novamente deve ser "E".

O caso continua como antes. "E", de acordo com sua definição do sinal "=", pode ser uma tautologia correta, mas

Ramsey erklärt die Identität so:

»x= x« soll eine Tautologie sein,
»x= y« eine Kontradiktion.

D. h.: Das Symbol » ... = ... « ist eine Tautologie dann, wenn auf beiden Seiten derselbe Buchstabe steht, eine Kontradiktion, wenn auf beiden Seiten verschiedene Buchstaben stehen. In dieser Form ist aber das Symbol überhaupt nicht zu verwenden; denn ich brauche doch das Gleichheitszeichen dazu, um die Ersetzbarkeit zweier verschiedener Zeichen auszudrücken. Die Ersetzbarkeit von » x = x« brauche ich nicht auszudrücken. (Nebenbei: Die einzige Anwendung, welche man von diesem Symbolismus machen könnte, besteht darin, daß sie mir erlaubt, statt der Worte » Tautologie« und » Kontradiktion « die Ausdrücke » x = x « und » x = y« zu setzen.) Wenn nun das Gleichheitszeichen die Ersetzbarkeit zweier *verschiedener* Zeichen ausdrücken soll, dann kann »x = y« keine Kontradiktion sein. Will ich eine Kontradiktion erhalten, so muß ich eine weitere Regel hinzufügen, etwa »x Def y«, (was bedeutet: »x« ist durch »y« ersetzbar) und nun schreiben:

x = y. ~ xDefy

Jetzt haben wir erst einen Widerspruch, da »x=y« erlaubt, was »~xDef y« verbietet. Dann drückt aber »xDefy« die Gleichheit aus.

Das zeigt, daß sich der Widerspruch als Widerspruch zwischen zwei Regeln darstellen muß.

WIDERSPRUCHSFREIHEIT VII

WAISMANN FORMULIERT DAS PROBLEM DER WIDERSPRUCHSFREIHEIT: Das Problem der Widerspruchsfreiheit bedeutet folgendes: Woher weiß ich, daß ein Satz, den ich mittels transfiniter Methoden bewiesen habe, nicht durch eine finite Zahlenrechnung widerlegt werden kann? Wenn z.B. ein Mathematiker einen Beweis findet für den Fermatschen Satz, der wesentlich transfinite Methoden benutzt - etwa das Auswahlaxiom oder den Satz vom ausgeschlossenen Dritten in der Form: entweder gilt der Fermatsche Satz für alle Zahlen oder es gibt

not say, »There is an individual« . Perhaps you will answer: of course it does not say, »There is an individual« but it shows what we really mean when we say, »There is an individual« . But this is not shown by »E«, but simply by the legitimate use of the symbol » (∃x) . . . « , and therefore just as well (and as badly) by the expression »~ (∃x) . x = x«. The same, of course, applies to your expressions, »There are at least two individuals« and so on.

SCHLICK AN WITTGENSTEIN: *Auszug aus einem Brief vom I5. August 1927.*

Vor einiger Zeit erhielt ich hierher (Millstatt, Kärnten) Ramsey's Antwort auf Ihren Brief. Ich schreibe die Stellen, die Sie interessieren, für Sie ab. Ramsey reproduziert zunächst in einem Satze den Gedanken Ihres Einwandes und fährt dann fort: »With this I entirely agree, but it still seems to me that Q(x, y) [dies war die Abkürzung für $(\varphi_e) . \varphi_e.x \equiv \varphi_e.y$] is an adequate substitute for x =y as an element in logical notation. We always use x = y as part of a propositional function which is generalized, and in any such case we shall get the right sense for the resulting general proposition if we put Q(x, y) instead.

. . . .

»I never really meant to suggest that Q(x, y) was a way of saying that x and y were identical. I imagined that Wittgenstein had shown that it was impossible to say any such thing. I only proposed Q(x, y) as a substitute for the symbol x = y, used in general propositions and in defining classes.

»He also made some criticisms on my remarks on the number of things in the world, which I think can be answered in the same sort of way, but in any case they are less important« (A. W.)

Ramsey explica a identidade assim:

"x = x" deve ser uma tautologia,
"x = y", uma contradição.

Ou seja: o símbolo "... = ..." é uma tautologia quando a mesma letra está em ambos os lados, uma contradição quando há letras diferentes em ambos os lados. Nesta forma, no entanto, o símbolo não deve ser usado de forma alguma; porque preciso do sinal de igualdade para expressar a substitutibilidade de dois sinais diferentes. Não preciso expressar a substitutibilidade de "x = x". (A propósito: a única aplicação que se poderia fazer deste simbolismo é que ele me permite usar as expressões "x = x" e "x = y" em vez das palavras "tautologia" e "contradição".) Se o sinal de igualdade deve expressar agora a substitutibilidade de dois sinais diferentes, então "x = y" não pode ser uma contradição. Se eu quiser obter uma contradição, tenho que adicionar outra regra, por exemplo "x Def y" (que significa: "x" pode ser substituído por "y"), e agora escrever:

x = y. ~ xDefy

Agora temos uma contradição, uma vez que "x = y" permite o que "~ xDef y" proíbe. Mas então "xDefy" expressa a igualdade.

Isto mostra que a contradição deve se apresentar como uma contradição entre duas regras.

CONSISTÊNCIA VII

WAISMANN FORMULA O PROBLEMA DA CONSISTÊNCIA: O problema de consistência significa o seguinte: como posso saber se uma proposição que demonstrei usando métodos transfinitos não pode ser refutada por um cálculo de número finito? Se, por exemplo, um matemático encontrar uma prova para o teorema de Fermat, que usa métodos essencialmente transfinitos - por exemplo, o axioma da escolha ou o teorema do terceiro excluído na forma: ou o teorema de Fermat se aplica a todos os números ou existe um número para o qual não se

não diz: "Existe um indivíduo". Talvez você responda: é claro que não diz: "Existe um indivíduo", mas mostra o que realmente queremos dizer quando dizemos: "Existe um indivíduo". Mas isto não é mostrado por "E", mas simplesmente pelo uso legítimo do símbolo "(∃x). . . ", E, portanto, tão bem (e tão mal) pela expressão" ~ (∃x). x = x «. O mesmo, é claro, se aplica às suas expressões: "Existem pelo menos duas pessoas" e assim por diante.

SCHLICK PARA WITTGENSTEIN: *Trecho de uma carta datada de 15. Agosto de 1927.*

Há algum tempo, recebi a resposta de Ramsey à sua carta aqui (Millstatt, Carinthia). Vou copiar as partes que interessam a você. Ramsey primeiro reproduz a ideia de sua objeção em uma frase e então continua: "Concordo inteiramente com isto, mas ainda me parece que Q (x, y) [esta era a abreviatura para $(\varphi_e) . \varphi_e.x \equiv \varphi_e.y$] é um substituto adequado para x = y como um elemento em notação lógica. Sempre usamos x = y como parte de uma função proposicional que é generalizada e, em qualquer caso, obteremos o sentido correto para a proposição geral resultante se colocarmos Q (x, y) em seu lugar.

. . . .

"Nunca quis realmente sugerir que Q (x, y) fosse uma forma de dizer que x e y eram idênticos. Imaginei que Wittgenstein tivesse mostrado que era impossível dizer tal coisa. Eu apenas propus Q (x, y) como um substituto para o símbolo x = y, usado em proposições gerais e na definição de classes.

"Ele também fez algumas críticas às minhas observações sobre o número de coisas no mundo, que eu acho que podem ser respondidas da mesma maneira, mas em qualquer caso são menos importantes" (N. W.)

eine Zahl, für die er nicht gilt - woher weiß ich, daß ein solcher Satz nicht durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden kann? Das ist keineswegs selbstverständlich. Und doch ist es merkwürdig, daß die Mathematiker ein solches Zutrauen zu den transfiniten Schluß weisen haben, daß nach dem Bekanntwerden eines solchen Beweises kein Mensch mehr den Versuch machen würde, ein Gegenbeispiel aufzufinden. Es fragt sich nun: Läßt sich dieses Zutrauen rechtfertigen? D. h., sind wir sicher, daß niemals ein Satz, der mittels transfiniter Methoden bewiesen ist, durch eine konkrete Zahlenrechnung widerlegt werden kann? Das ist die mathematische Frage der Widerspruchsfreiheit.

Ich will gleich anführen, wie mir die Sache zu liegen scheint, indem ich die analoge Frage für die gewöhnliche Algebra aufwerfe: Woher weiß ich, wenn ich einen Satz im Buchstabenkalkül bewiesen habe, daß er nicht durch ein Zahlenbeispiel widerlegt werden kann? Gesetzt z.B., ich habe bewiesen, daß

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

ist - woher weiß ich, daß diese Formel der Kontrolle durch das Zahlenrechnen standhält? Hier haben wir genau dieselbe Situation. Ich glaube, daß wir folgendes sagen müssen: Der Grund dafür, daß eine in Buchstaben ausgeführte Rechnung und eine in Zahlen ausgeführte Rechnung zum selben Resultat führen, d. h., der Grund für die Anwendbarkeit der Buchstabenrechnung auf die konkreten Zahlen, liegt darin, daß die Axiome der Buchstabenrechnung - das kommutative und das assoziative Gesetz der Addition etc. - von vornherein so gewählt sind, daß sie eine solche Anwendung erlauben. Das hängt damit zusammen, daß wir die Axiome nach einer bestimmten Vorschrift auswählen: Ein Axiom entspricht nämlich einer Induktion, und diese Entsprechung ist deshalb möglich, weil die Formeln dieselbe Multiplizität besitzen wie die Induktion, so daß wir das System der Induktion auf das System der Formeln projizieren können. In diesem Fall also besteht kein Problem, und man kann gar nicht die Frage aufwerfen, ob je eine Buchstabenrechnung mit einer Zahlenrechnung in Konflikt geraten kann. Aber wie verhält es sich mit der Analysis? Hier scheint zunächst wirklich ein Problem vorzuliegen.

WITTGENSTEIN: Zunächst einmal: Wovon reden wir eigentlich? Ist unter Zutrauen eine Stimmung verstanden, so würde ich sagen: Die interessiert mich nicht. Wir haben es hier nicht mit der Psychologie der Mathematiker zu tun. Unter Zutrauen wird also wohl etwas anderes gemeint sein. Dann kann es nur etwas sein, das sich in Symbolen hinschreiben läßt. Wonach man hier zu fragen scheint, das ist der Grund für die Übereinstimmung zweier Rechnungen. Nehmen wir ein ganz einfaches Beispiel:

$$2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$$
$$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$$

Ich habe hier zwei unabhängige Rechnungen gemacht und erhalte beide Male dasselbe. Unabhängig heißt hier: die eine Rechnung kopiert nicht die andere. Ich habe zwei verschiedene Vorgänge.

Und wie, [was wäre dann,] wenn sie nicht übereinstimmten? Dann kann ich auch nichts machen. Es würden dann eben die Symbole eine andere Grammatik haben. Auf Grund der Grammatik gilt das assoziative und das kommutative Gesetz der Addition. Aber in der Gruppentheorie ist AB nicht mehr gleich BA; wir könnten also z. B. eine Multiplikation nicht mehr auf zwei Arten rechnen, und dennoch haben wir einen Kalkül.

Die Sache ist die: Ich muß doch vorher eine Bestimmung darüber getroffen haben, wann eine Rechnung richtig ist. D. h. ich muß angeben, unter welchen Umständen ich sage, daß eine Formel bewiesen ist. Würde nun der Fall eintreten, daß eine Formel auf Grund einer Methode als

aplica - como sei que tal proposição não pode ser refutada por um contra-exemplo? Isto não é de nenhum modo autoevidente. E, no entanto, é estranho que os matemáticos tenham tanta confiança na inferência transfinita que, depois que tal prova se tornou conhecida, ninguém tentaria mais encontrar um contra-exemplo. A questão que surge agora: esta confiança pode ser justificada? Em outras palavras, temos certeza de que uma proposição que foi comprovada usando métodos transfinitos nunca pode ser refutada por um cálculo numérico concreto? Este é o problema matemático da consistência.

Vou dizer imediatamente como a questão me parece estar posta, levantando a questão análoga para a álgebra ordinária: como posso saber, quando demonstrei uma proposição no cálculo algébrico, que ela não pode ser refutada por um exemplo numérico? Suponha, por exemplo, que tenha demonstrado que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

- como sei que esta fórmula resistirá ao escrutínio dos cálculos numéricos? Aqui temos exatamente a mesma situação. Acho que temos que dizer o seguinte: a razão pela qual um cálculo feito com letras e um cálculo feito com números levam ao mesmo resultado; ou seja, a razão para a aplicabilidade da aritmética com letras a números concretos é que os axiomas da aritmética com letras - a lei de adição comutativa e associativa etc. - são escolhidos desde o início de forma que permitam tal aplicação. Isto tem a ver com o fato de escolhermos os axiomas de acordo com uma certa regra: um axioma corresponde a uma indução, e esta correspondência é possível porque as fórmulas têm a mesma multiplicidade que a indução, de modo que podemos projetar o sistema de indução ao sistema de fórmulas. Neste caso, não há problema e não se pode questionar se um cálculo com letras pode entrar em conflito com um cálculo numérico. Mas e quanto à análise? A princípio, realmente parece haver um problema aqui.

WITTGENSTEIN: em primeiro lugar: do que estamos realmente falando? Se a confiança for entendida como um estado de espírito, eu diria: não estou interessado nisto. Não estamos lidando aqui com a psicologia dos matemáticos. O que confiança vai provavelmente significar deve ser outra coisa. Por isto só pode ser algo que pode ser escrito em símbolos. O que parece ser uma pergunta aqui é a razão para a concordância entre dois cálculos. Vamos dar um exemplo muito simples:

$$2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$$
$$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$$

Fiz dois cálculos independentes aqui que dão a mesma coisa nas duas vezes. Independente aqui significa: um cálculo não copia o outro. Tenho dois processos diferentes.

E como, [e se] eles discordassem? Então também não posso fazer nada. Os símbolos teriam então uma gramática diferente. Devido à gramática, aplicam-se as leis de adição associativa e comutativa. Mas, na teoria dos grupos, AB não é mais o mesmo que BA; nós não poderíamos mais, por exemplo, calcular uma multiplicação de duas maneiras, e no entanto ainda teríamos um cálculo.

A questão é: tenho que ter feito uma determinação de antemão sobre quando um cálculo está correto. Isto é, tenho que assinalar em que circunstâncias digo que uma fórmula foi demonstrada. Se agora surgir o caso de que uma fórmula é considerada como demonstrada com base em um método, mas como refutada com base em outro método, isto não significaria de forma alguma que agora temos uma contradição e estamos irremediavelmente perdidos, mas poderíamos dizer: a fórmula significa coisas diferentes. Pertence a dois cálculos diferentes; em um cálculo é demonstrada, no outro é refutada. Portanto, temos duas fórmulas muito diferentes diante de bewiesen gilt, auf Grund einer andern Methode aber als widerlegt, so würde das noch keineswegs bedeuten, daß wir nun einen Widerspruch haben und rettungslos verloren sind, sondern wir könnten sagen: Die Formel bedeutet eben Verschiedenes. Sie gehört zwei verschiedenen Kalkülen an; in dem einen Kalkül ist sie bewiesen, im andern ist sie widerlegt. Wir haben also eigentlich zwei ganz verschiedene Formeln vor uns, die nur zufällig die Zeichen gemein haben.

In der Frage nach der Widerspruchsfreiheit wird eine ganze Reihe von Verwechslungen gemacht.

Erstens muß man fragen, wo der Widerspruch auftreten soll: in den Regeln oder in den Konfigurationen des Spiels.

Was ist eine Regel? Wenn ich z.B. sage: Tue das! und: Tue das nicht! so weiß der andere nicht, was er tun soll. D. h., einen Widerspruch lassen wir nicht als Regel gelten. Wir nennen eben einen Widerspruch nicht Regel. Oder noch einfacher: Die Grammatik des Wortes »Regel« ist so, daß ein Widerspruch nicht als Regel bezeichnet wird.

Wenn nun unter meinen Regeln ein Widerspruch vorkommt, so könnte ich sagen: Dann sind das keine Regeln in dem Sinn, in dem ich sonst von Regeln spreche. Was tun wir in einem solchen Fall? Nichts einfacher: Wir geben eine neue Regel, und damit ist die Sache erledigt.

Ein Beispiel dafür wäre das Brettspiel.[47] Gesetzt, es gibt hier eine Regel, die sagt: Schwarz muß über Weiß ziehen. Wenn nun die weiße Figur am Rande des Feldes steht, so ist die Regel nicht mehr anwendbar. Wir treffen dann einfach für diesen Fall eine neue Bestimmung, und damit ist die Schwierigkeit aus der Welt geschafft.

Aber man muß hier noch genauer sein. Wir haben hier einen Widerspruch (nämlich zwischen den Regeln: »Weiß muß über Schwarz ziehen« und: »Über den Rand des Feldes darf man nicht ziehen.«). Ich frage nun: Haben wir schon zu Anfang eine Methode gehabt, den Widerspruch aufzufinden? Hier gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Im Brettspiel war diese Möglichkeit zweifellos vorhanden. Die Regel lautet ja: »überall ....« Ist damit gemeint: »An dieser Stelle und an dieser Stelle und ....«, so habe ich offenbar schon zu Anfang die Möglichkeit gehabt, den Widerspruch aufzufinden, und wenn ich ihn nicht gesehen habe, so lag das an mir: Ich bin vielleicht zu faul gewesen, um alle Fälle durchzugehen, oder ich habe einen Fall vergessen. In diesem Fall liegt gar kein ernsthaftes Problem vor. Ist der Widerspruch einmal da, so gebe ich eben eine weitere Bestimmung und beseitige ihn damit. Den Widerspruch kann man immer aus der Welt schaffen.

Ob aber ein Widerspruch besteht, das kann ich immer entscheiden, indem ich das Regelverzeichnis durchmustere. Das ist z. B. im Falle der euklidischen Geometrie eine Angelegenheit von fünf Minuten. Die Regeln der euklidischen Geometrie widersprechen einander nicht, d. h. es kommt keine Regel vor, die eine früher gegebene aufhebt (»p« und »~ p«), und damit bin ich zufrieden.

2. Nun nehmen wir aber den zweiten Fall an, daß wir keine solche Methode haben. Mein Regelverzeichnis ist also in Ordnung. Ich sehe keinen Widerspruch. Ich frage nun: Besteht also jetzt noch irgendeine Gefahr? Keine Rede! Wovor sollen wir uns denn fürchten?[48] Etwa vor einem Widerspruch? Aber der Widerspruch ist mir ja erst durch die Methode seiner Auffindung gegeben! Solange er nicht da ist, geht er mich nichts an. Ich kann also ganz ruhig sein und rechnen. Würde dann dadurch, daß ein Widerspruch in der Mathematik aufgefunden würde, all das, was die Mathematiker seit mehreren Hunderten von Jahren gerechnet haben, plötzlich

47. Vgl. oben, S, 141. (F. H.)
48. Wir brauchen nicht beunruhigt zu sein. Es ist gar kein Anlaß dazu, beunruhigt zu sein. (A. W.)

nós, que por acaso têm os sinais em comum.

Toda uma série de confusões é feita acerca da questão da consistência.

Em primeiro lugar, é preciso perguntar onde a contradição deve ocorrer: nas regras ou nas configurações do jogo.

O que é uma regra? Por exemplo, se eu disser: Faça isto! e: não faça isto! então o outro não saberia o que fazer. Em outras palavras, não aceitamos uma contradição como regra. Justamente, nós não chamamos uma contradição de regra. Ou ainda mais simples: a gramática da palavra "regra" é tal que uma contradição não é chamada de regra.

Mas se houver uma contradição entre as minhas regras, eu poderia dizer: então estas não são regras no sentido em que costumo falar de regras. O que fazemos neste caso? Nada mais simples: fornecemos uma nova regra e pronto.

Um exemplo disto seria o jogo de tabuleiro.[47] Suponha que haja uma regra aqui que diga: as peças pretas têm que saltar sobre as peças brancas. Se a peça branca está agora na borda do campo, a regra não é mais aplicável. Então, simplesmente fazemos uma nova determinação para este caso, e isto elimina a dificuldade.

Mas é preciso ser mais preciso aqui. Temos uma contradição aqui (a saber, entre as regras: "As brancas devem passar por cima das pretas" e: "Não se deve ultrapassar as bordas do campo"). Agora pergunto: tínhamos um método para encontrar a contradição desde o início? Existem duas opções aqui:

1. Essa possibilidade estava, sem dúvida, presente no jogo de tabuleiro. A regra diz: "Em todos os lugares ..." Se isto significa: "Neste ponto e neste ponto e ...", obviamente tive a oportunidade de encontrar a contradição desde o início, e se não a vi, então a responsabilidade é minha: talvez eu tivesse sido muito preguiçoso para examinar todos os casos, ou tenha esquecido um dos casos. Neste caso, não há nenhum problema sério. Uma vez que a contradição esteja lá, eu apenas darei uma determinação adicional, e assim a eliminarei. Pode-se sempre eliminar a contradição.

No entanto, sempre posso decidir se há uma contradição examinando a lista de regras. Este é, por exemplo, no caso da geometria euclidiana, uma questão de cinco minutos. As regras da geometria euclidiana não se contradizem, ou seja, não ocorre que uma regra cancele outra determinada anteriormente ("p" e "~ p"), e estou contente com isto.

2. Mas agora vamos assumir o segundo caso, em que não temos um método assim. Portanto, a minha lista de regras está em ordem. Não vejo nenhuma contradição. E agora pergunto: ainda existe algum perigo neste momento? Sem palavras! Do que devemos ter medo?[48] De uma contradição? Mas a contradição só me é dada pelo método de sua descoberta! Enquanto ela não estiver lá, não é da minha conta. Portanto, posso ficar bem tranquilo e calcular. Se uma contradição na matemática fosse encontrada, tudo o que os matemáticos têm calculado por centenas de anos de repente chegaria ao fim?[49] Diríamos que não houve nenhum cálculo? Absolutamente não. Se houver uma contradição, nós apenas vamos tentar resolver. Mas *agora* não precisamos nos preocupar com isto.

O que realmente se quer dizer é algo completamente diferente: temos um determinado modelo em mente e desejamos *ajustar* o cálculo *a este modelo*. (Veja mais adiante.)[50]

47. Cf. acima, p. 142. (N. E.)
48. Não precisamos ficar intranquilos. Não há nenhum motivo para estar intranquilo. (N. W.)
49. O que nos perturba é o pensamento: não pode ocorrer uma contradição em algum momento? Aqui eu perguntaria: o que significa *em algum momento*? E *se* depois de meio ano ocorresse uma contradição - seria por causa disto injustificável tudo o que calculei? (N. W.)
50. Talvez se refira à p. 238, abaixo. (N. E.)

aufhören?[49] Würden wir sagen, es sind keine Rechnungen gewesen ? Absolut nicht. Tritt ein Widerspruch auf, so werden wir uns eben helfen. Aber *jetzt* brauch en wir uns keine Sorgen darum zu machen .

Was man in Wirklichkeit meint, ist etwas ganz anderes: Es schwebt einem ein gewisses Vorbild vor, und man will den Kalkül *diesem Vorbild angleichen*. (Vgl. später.)[50]

Einfügung aus dem Diktat.[51]

WIDERSPRUCHSFREIHEIT VIII

Ich möchte mich gegen den *Popanz* des Widerspruchs wenden, gegen die abergläubische Furcht, als würde die Auffindung eines Widerspruchs die Zerstörung des Kalküls bedeuten.[52][53]

Ich möchte fragen: Warum diese Engherzigkeit? Hätten nicht die Kalküle mit Widerspruch ihren eigenen Reiz?[54] Wahrscheinlich wird man sagen: Nein, ein solcher Kalkül ist trivial.[55] Denn aus einem Widerspruch folgt jede Formel: Man kann jede beliebige Formel anschreiben, und damit verliert der Kalkül sein ganzes Interesse. Darauf würde ich sagen: Dann besteht der Kalkül ja aus zwei Teilen: aus einem Teil, der bis zur Auffindung des Widerspruchs führt, und aus einem zweiten Teil, in dem es erlaubt ist, jede Formel hinzuschreiben. Das Interessante istder erste Teil. Man wird fragen: Geht der Kalkül zu Ende? *Wann* geht er zu Ende? Eine höchst spannende Frage!

Nehmen wir die euklidische Geometrie! Die Axiome sind hier Regeln, d. h. Sätze der Grammatik. (Wenn ich z.B. sage: »Es ist möglich, um jeden beliebigen Punkt einen Kreis mit beliebigem Radius zu schlagen«, so heißt das: Wenn ich eine Aussage mache, in welcher von

49. Was uns irritiert ist der Gedanke: Kann nicht einmal ein Widerspruch auftreten? Hier frage ich: Was heißt *einmal*? Und *wenn* nach einem halben Jahr ein Wid erspruch auftritt - würde dann deswegen alles, was ich gerechnet habe, unberechtigt sein? (A. W.)

50. Vielleicht bezieht es sich auf S. 237 unten. (F. H.)

51. Im Dezember 1931 war Schlick in Amerika. Waismann jedoch sah Wittgenstein und machte für Schlick. Aufzeichnungen. Wahrscheinlich entspricht die »Einfügung aus dem Diktat« in seinem eigenen Notizbuch allen oder einem Teil jener Aufzeichnungen. Unter Waismanns Papieren ist ein »Diktat für Schlick« (offenbar Wittgensteins Arbeit zu ungefähr jener Zeit), welches sich mit dem Verstehen eines Satzes beschäftigt. Es deckt sich mit der gegenwärtigen Einfügung nicht, und ist mit nichts in Wittgensteins Nachlaß identisch. Es wurde den Nachlaßverwaltern zur Verfügung gestellt. (F. H.)

52. Denken Sie sich, man würde mir sagen: Mein Bruder Paul ist im Wald tot aufgefunden worden. Was soll ich tun? Soll ich die Polizei verständigen? So fragt man auch hier: Was sollen wir tun? (A. W.)

53. Diese Bemerkung erscheint auf der linken Seite gegenüber dem Titel »Einfügung aus dem Diktat«. Es ist von allgemeiner Bedeutung gleichweise für das, was dem Titel vorangeht, und für das, was ihm folgt. Wittgensteins einziger damals noch lebender Bruder hieß in der Tat Paul. (F. H.)

54. Siehe oben, S. 159. (F. H.)

55. »p . ~ p« wollen wir in unserem Regelverzeichnis nicht haben. D. h., »p . ~ p« betrachten wir nicht als *Regel*. (Die Grammatik des Ausdrucks Regel ist so, daß »p . ~ p« nicht als Regel gilt.)

Wir können uns alles sehr vereinfacht denken, z. B.

»c → p« ist das ganze Spiel.

Nun sagt man aber weiter: Es darf auch niemals ein Widerspruch aus einer Regel folgen. Das verstehen wir wieder nicht. Nehmen wir die euklidischen Axiome! Die Axiome sind Regeln, d. h., Sätze der Grammatik. Die Spielregeln innerhalb der Geometrie sind die Regeln der Logik. Wo wäre dann ein Widerspruch zu gewärtigen?

»Geben Sie diesem Stab 5m Länge«. »Geben Sie die sem Stab 3 + 3m Länge« Wäre das ebenso? (A. W.)

Inserção do Ditado.[51]

CONSISTÊNCIA VIII

Gostaria de me voltar contra o *bicho-papão* da contradição, contra o medo supersticioso, como se a descoberta de uma contradição significasse a destruição do cálculo.[52][53]

Eu gostaria de perguntar: por que esta estreiteza de ideias? Os cálculos com contradição não teriam o seu próprio charme?[54] Provavelmente dir-se-ia: não, um cálculo assim é trivial.[55] Porque de uma contradição segue-se qualquer fórmula: pode-se escrever qualquer fórmula arbitrária e o cálculo perderá todo o seu interesse. Então eu diria: então o cálculo consiste em duas partes: uma parte que leva à descoberta da contradição, e uma segunda parte na qual é permitido escrever qualquer fórmula. O interessante é a primeira parte. Alguém perguntará: o cálculo está chegando ao fim? *Quando* é que isto acaba? Uma pergunta muito emocionante!

Tomemos a geometria euclidiana! Os axiomas aqui são regras; isto é, proposições da gramática. (Se eu disser, por exemplo: “É possível fazer um círculo de qualquer raio ao redor de qualquer ponto”, isto significa: Se eu fizer uma afirmação em que o círculo ao redor deste ponto é mencionado, então esta afirmação tem sentido se ela for verdadeira ou falsa. Isto mostra que aquele axioma era uma regra gramatical.) As regras para derivar novas proposições dos axiomas são as regras da lógica. Eu agora pergunto: *onde* é que uma contradição seria esperada?

Vamos supor que uma medição empírica da soma dos ângulos de um triângulo resultasse num total de 182°. Agora alguém chega e demonstra que a soma dos ângulos é 180°. Aí você fala:

51. Em dezembro de 1931, Schlick estava na América. Waismann, no entanto, viu Wittgenstein e anotou para Schlick. Registros. Provavelmente a “inserção do ditado” em seu próprio caderno corresponde a todas ou a uma parte dessas anotações. Entre os papéis de Waismann está um “Ditado para Schlick” (evidentemente o trabalho de Wittgenstein aproximadamente nesta época), que trata da compreensão de uma proposição. Não coincide com a adição atual e não é idêntico a nada no *Nachlass* de Wittgenstein. Material que foi colocado à disposição dos administradores do espólio literário. (N. E.)

52. Imagine que você me diga: Meu irmão Paul foi encontrado morto na floresta. O que devo fazer? Eu deveria chamar a polícia? Portanto, também aqui se pergunta: o que devemos fazer? (N. W.)

53. Esta observação aparece no lado esquerdo, oposto ao título “Inserção do Ditado”. Tem um significado geral tanto para o que precede o título como para o que segue. O único irmão de Wittgenstein ainda vivo na época era, na verdade, Paul. (N. E.)

54. Ver acima, p. 160. (N. E.)

55. Não queremos »p . ~p« na nossa lista de regras. Ou seja, não consideramos »p . ~ p« como uma *regra*. (A gramática da expressão regra é tal que »p . ~ p« não conta como uma regra.)

Podemos pensar em tudo de uma forma muito simplificada, por exemplo que

»c → p« é o jogo completo.

Mas agora alguém vai dizer: uma contradição nunca pode se seguir de uma regra. Não entendemos isto, novamente. Pegue os axiomas euclidianos! Os axiomas são regras; isto é, proposições gramaticais. As regras do jogo dentro da geometria são as regras da lógica. Onde então uma contradição seria esperada?

“Dê a esta haste 5m de comprimento”. “Dê a esta haste 3 + 3m de comprimento” seria o mesmo? (A. W.)

dem Kreis um diesen Punkt die Rede ist, so hat diese Aussage Sinn, ob sie nun wahr oder falsch ist. Das zeigt, daß jenes Axiom eine Regel der Grammatik war.) Die Regeln zur Herleitung neuer Sätze aus den Axiomen sind die Regeln der Logik. Ich frage nun: *Wo* wäre denn ein Widerspruch zu gewärtigen?

Nehmen wir an, eine empirische Messung der Winkelsumme in einem Dreieck würde den Betrag von 182° ergeben. Nun kommt einer her und beweist, daß die Winkelsumme 180° ist. Darauf sagt man: Der hat ja schon ungefähr gewußt, wie groß sie sein wird und der zeigt nun, daß sie wirklich ganz in der Nähe ist. Wie wäre es aber, wenn die Messung stark von dem Wert 180° abwiche? Dann kommt es ganz darauf an, wie ich die Sache *deute*. Ich kann *beide* als Winkelsumme auffassen. Wir müssen uns aber wohl im klaren darüber sein: Die Messung und der Beweis widersprechen einander in keiner Weise. Die Messung ist das, was sie ist. Sie wird durch den Beweis nicht aufgehoben oder widerlegt. Wenn ich die Messung als zulässige Methode in die Geometrie einführe, so haben wir eben überhaupt ein anderes Gebilde vor uns. Daß ich dann verschiedene Werte zu der Winkelsumme bekomme, kann mich gar nicht überraschen; denn ich habe jetzt eben verschiedene Bestimmungen über die Größe eines Winkels getroffen, d. h. der Ausdruck »Winkel« und »Winkelsumme« ist zweideutig, es gelten verschiedene Regeln der Grammatik für ihn.

Die Sache liegt gerade so wie etwa in dem Fall, daß ich sagen wollte: Durch je drei Punkte geht eine Gerade. Ich würde dann eben unter dem Wort »Gerade« etwas anderes verstehen, als was man sonst in der Geometrie darunter versteht. Nun hat das Wort »Gerade« bereits eine feste Grammatik, so daß ich dort einen Widerspruch sehen würde, wo meine Grammatik vom Wort »Gerade« von der normalen abwiche. (In demselben Sinn gebrauche ich das Gleichheitszeichen als Synonym von »ersetzbar durch«, und würde dort von einem Widerspruch reden, wo die Regeln über das Gleichheitszeichen von der Grammatik des Ausdrucks »ersetzbar durch« abweichen.)

Kehren wir noch einmal zu der Winkelsumme im Dreieck zurück! Gesetzt, wir könnten einmal beweisen, daß die Winkelsumme 180° ist, ein andermal, daß sie 182° ist - (und zwar beide Male aus den Axiomen) - was dann? Ich würde sagen: Wir haben dann eben zwei verschiedene Bestimmungen darüber getroffen, wann eine Messung als fehlerfrei anzusehen ist. Ich habe früher einmal gesagt: · Die Axiome der Geometrie sind der Maßstab, nach dem wir die Güte einer Messung beurteilen.[56] Die Regel $\alpha + \beta + \gamma = 180°$- ist ein solcher Maßstab. Gebe ich eine zweite solche Regel an, so habe ich eben zwei Maßstäbe eingeführt, freilich Maßstab in *verschiedenem Sinn*. Denken wir uns etwa, ich würde einmal einen Maßstab mit festen Teilstrichen benutzen, ein andermal einen Maßstab, bei welchem die Teilstriche 1, 2 ... 9 fest sind, der Teilstrich 10 aber beweglich. Das wäre dann ein Maßstab in einem ganz andern Sinn. Ich weiß natürlich nicht, ob man je einen solchen Maßstab anwenden würde. Aber wer kann mir verbieten, das auch einen Maßstab zu nennen? Die beiden Sätze: Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°, und: Die Winkelsumme im Dreieck ist 182°, wären zwei solche verschiedene Maßstäbe, und es kommt nun bloß auf die Anwendung an. Ich könnte mir sogar denken, wie solche Regeln anzuwenden wären:[57] Die eine Regel verwende ich z. B., wenn ich die Winkel mit einer *mechanischen* Methode messe (Transporteur), die andere, wenn ich sie mit einer *optischen* Methode messe.

Wo wollen wir dann rigoros sein? Ich glaube, in den logischen Regeln.[58] Aber da *kann* man ja

56. Siehe oben, S. 39 f. (F. H.)

57. Einen Widerspruch können wir nicht als Regel gebrauchen. Einen Widerspruch *nenne* ich keine Regel, weil die Grammatik des Wortes »Regel« so ist. (A. W.)

58. Das, was man ein Regelverzeichnis nennen will, hängt mit der Grammatik des Wortes »Regelverzeichnis« ähnlich zusammen, wie das Gleichheitszeichen mit dem Wort »ersetzbar durch«. Wenn man z. B. begründen will, warum man

ele já sabia mais ou menos o tamanho que daria e agora mostra que está mesmo muito perto disto. Mas e se a medição se desviou significativamente do valor 180°? Então, tudo depende de como eu *interpreto* o assunto. Posso conceber *os dois* como a soma dos ângulos. Mas temos que ser claros sobre isto: a medição e a demonstração não se contradizem de forma alguma. A medição é o que é. Não é cancelada ou refutada pela demonstração. Se eu introduzir a medição como um método permissível na geometria, teremos uma estrutura diferente à nossa frente. O fato de eu auferir valores diferentes para a soma dos ângulos não pode me surpreender de forma alguma; pois acabei de fazer várias determinações sobre o tamanho de um ângulo, ou seja, as expressões "ângulo" e "soma dos ângulos" são ambíguas; regras gramaticais diferentes se aplicam a elas.

A questão é como no caso em que eu queria dizer: uma linha reta passa por cada três pontos. Então, eu compreenderia pela palavra "linha reta" algo diferente do que é compreendido por ela em geometria. Agora a palavra "linha reta" já tem uma gramática fixa, de modo que eu veria uma contradição onde minha gramática da palavra "linha reta" se desvia da normal. (No mesmo sentido, uso o sinal de igual como sinônimo de "substituível por" e falaria de uma contradição em que as regras sobre o sinal de igual diferem da gramática da expressão "substituível por".)

Vamos voltar mais uma vez à soma dos ângulos do triângulo! Suponha que pudéssemos demonstrar numa vez que a soma dos ângulos é 180°, e na outra vez que é 182° - (ambas as vezes a partir dos axiomas) - e então? Eu diria: acabamos de fazer duas determinações diferentes acerca de quando uma medição dever ser considerada como correta. Eu disse antes: os axiomas da geometria são o padrão pelo qual julgamos a qualidade de uma medição.[56] A regra $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ - este é o padrão. Se eu der uma segunda regra, acabo de introduzir dois padrões, padrões, admitidamente, em *sentidos diferentes*. Imaginemos, por exemplo, que um dia eu usasse uma escala com marcas fixas de graduação, e numa outra vez uma escala em que as notas de graduação 1, 2 ... 9 são fixas, mas a linha de graduação 10 é móvel. Isto seria um padrão em um sentido completamente diferente. Claro que não sei se um padrão assim seria empregado. Mas quem pode me proibir de chamar isto de padrão? As duas proposições: a soma dos ângulos no triângulo é de 180°, e: a soma dos ângulos no triângulo é de 182°, seriam duas escalas diferentes, e isto depende apenas da aplicação. Eu poderia até imaginar como é que tais regras seriam aplicadas:[57] emprego uma regra, por exemplo, se eu medir os ângulos com um método *mecânico* (transportador), e outra se eu medir com um método *óptico*.

Então onde queremos ser rigorosos? Eu acredito que nas regras lógicas.[58] Mas também ali se *pode* ser rigoroso. Neste sentido, é muito fácil mostrar que a geometria euclidiana não contém

56. Ver acima, p. 40s. (N. E.)

57. Não podemos usar uma contradição como regra. Não *chamo* uma contradição de regra porque é assim que funciona a gramática da palavra "regra". (N. W.)

58. O que se quer chamar de lista de regras está relacionado à gramática da palavra "lista de regras" de maneira semelhante ao sinal de igualdade com a palavra "substituível por". Se alguém, por exemplo, quiser dar razões de por que exige uma certa gramática para o sinal de igualdade, por que pede que seja transitivo, pode-se assinalar que a palavra "substituível" tem a mesma gramática. Mas a razão para esta gramática não pode ser fornecida. Acontece o mesmo com a gramática da expressão "lista de regras". O motivo pelo qual nenhuma contradição pode ocorrer é simplesmente o de que só chamamos de regra o que não contém contradição. Não há razão adicional para isto.

A exigência de consistência só pode ser feita quando se trata do que se denomina *evidentemente* de contradição. Uma contradição oculta não viola a gramática da "lista de regras". Pois ela só está oculta porque a forma como uso a lista de regras ainda não foi, afinal, regulamentada. Bem, então eu tenho que resolver isto de forma que não haja contradição. Mas mesmo este tipo de contradição só pode ser evitado quando ocorrer. Antes que isto aconteça, e antes que eu tenha um método para gerá-la, ela não apenas é inevitável, como tampouco há absolutamente nada que eu tenha que evitar e, portanto, não posso fazer qualquer movimento para evitá-la. Não há nenhum motivo para preocupação. (N. W.)

auch rigoros sein. In diesem Sinn ist es ganz leicht zu zeigen, daß die euklidische Geometrie keinen Widerspruch enthält. Nun wird man sagen: Sie hat keinen offenbaren Widerspruch. Darauf erwidere ich: Vollkommen genug für die Logik! Denn alles andere hängt von offenen Regeln ab, die ich ändern werde, damit ich keinen Widerspruch bekomme.

Sollte ein Widerspruch gefunden werden, so doch nur durch Regeln, die ich erst geben werde und die ich dann wieder beseitigen kann. Es schaut so aus, als drohe uns das Verderben. Aber nur in der einen Weise, daß ein Widerspruch offen da liegt. Gegen den versteckten Widerspruch *hat* die Logik nichts. Sie sagt nicht: Es darf nicht einmal ein Widerspruch auftreten, sondern sie sagt: Du darfst es nicht dazu kommen lassen, d. h., du mußt die Regeln, die du geben wirst, so einrichten, daß kein Widerspruch entsteht. Vorläufig aber ist alles in Ordnung, und zwar vollkommen in Ordnung, und eine Gefahr ist überhaupt nicht vorhanden.

Mit andern Worten: Wenn man jemandem die Axiome der euklidischen Geometrie vorlegt und ihn fragt: »Ist das ein Regelverzeichnis?« so wird er die Frage bejahen. Fragt man nun weiter: »Ist ein Widerspruch darin enthalten?« so lautet die Antwort: »Nein.« »Kann aber einer daraus werden?« »Das weiß ich nicht; das kommt darauf an, was du daraus machst. Kannst du schon angeben, wie? Wenn nicht, dann bist du dir noch nicht im klaren; dann mußt du dich so einrichten, daß keiner daraus wird.«

In der Logik sind wir rigoros gegen den Widerspruch, insofern wir ein Regelverzeichnis haben wollen und nicht eines, das keines ist. Ferner ist Widerspruch in der Logik nur zwischen »p« und » ~ p« . Daraus folgt, daß nur der Kalkül, den die Logik an die Hand gibt, entscheidend ist dafür, ob etwas logisch erlaubt oder logisch verboten ist. Alle anderen Deutungen und Transformationen gehen die Logik nichts an.

Nehmen wir an, ich habe den Satz »q« und ich gebe die Regel: »q . ~ p ≡ q« (d. h., aus »q « folgt »~ p«). Ich kann diese Regel geben oder nicht. Nehmen wir an, ich hätte früher »p« gehabt, dann sagt die Logik: Diese Regel darfst du nicht geben! (»q« = »Die Winkelsumme ist 180°« ⟨und⟩ »p« = »Die Winkelsumme ist 181°« stehen nebeneinander. Erst wenn ich die Regel gebe: »q . ~ p ≡ q«, *erst dann* ist der Widerspruch da, früher nicht !) Es wird also dort der Widerspruch liegen, wo ich die Regel gebe, daß »p« und » ~ p« herauskommt, und das darf ich allerdings nicht tun.

Was irreführt, ist der Glaube, daß alles zwangsläufig geschieht, daß wir, ob wir wollen oder nicht, rettungslos in den Abgrund hinabgleiten. Werden wir denn nicht zwangsläufig geführt? In gewissem Sinn werden wir es schon. Aber wodurch? Durch eine Analogie: Nicht durch den Kalkül, sondern durch gewisse unausgesprochene Bedingungen, welchen wir den Kalkül angleichen wollen. Z. B.: Es hört dann auf, eine Geometrie zu sein (die Winkelsumme soll nur einen Wert haben). Kurz, es ist ein anderer Charakter, der mich hier führt. Den Widerspruch an sich

---

eine gewisse Grammatik des Gleichheitszeichens fordert, warum man etwa verlangt, daß es transitiv ist, so kann man darauf hinweisen, daß das Wort »ersetzbar« dieselbe Grammatik hat. Aber den Grund für diese Grammatik kann man nicht angeben. Ebenso ist es mit der Grammatik des Wortes »R egelverzeichnis«. Der Grund dafür, daß keine Widersprüche auftreten dürfen, ist einfach der, daß wir Regel nur das nennen, was keinen Widerspruch enthält. Eine weitere Begründung gibt es nicht.

Die Forderung der Widerspruchsfreiheit ist nur dort zu stellen, wo es sich um das handelt, was man *offenbaren* Widerspruch nennt. Ein versteckter Widerspruch verstößt nicht gegen die Grammatik des »Regelverzeichnisses«. Denn versteckt ist er ja nur dadurch, daß die Art und Weise, wie ich das Regelverzeichnis anwende, überhaupt noch nicht geregelt ist. Nun, dann muß ich diese Art und Weise regeln, und zwar so, daß kein Widerspruch herauskommt. Aber auch diese Art und Weise eines Widerspruchs ist erst dann zu vermeiden, wenn er auftritt. Ehe er auftritt und ehe ich noch eine Methode habe, ihn herbeizuführen, ist er nicht nur nicht zu vermeiden, sondern es ist noch gar nichts da, was ich vermeiden müßte, und ich kann daher auch keine Anstalten treffen, ihn zu vermeiden. Zur Besorgnis ist gar kein Grund vorhanden. (A. W.)

contradições. Agora se dirá: não há contradição óbvia. Ao que eu respondo: perfeito o suficiente para a lógica! Porque tudo o mais depende de regras abertas que eu mudaria para que não obtivesse nenhuma contradição.

Uma contradição somente deveria ser encontrada por meio de regras que estou por dar e que poderei remover depois. Pareceria que estamos diante de uma ruína. Mas isto acontece somente quando há uma contradição aberta. A lógica *não tem* nada contra a contradição oculta. Ela não diz: não deve haver nem mesmo uma contradição, mas sim: você não deve permitir que se chegue a este ponto, ou seja, você tem que organizar as regras que vai estabelecer de tal forma que não haja contradição. Por enquanto, porém, está tudo bem, perfeitamente bem e não há perigo algum.

Em outras palavras, se uma pessoa colocar os axiomas da geometria euclidiana na frente de alguém e lhe perguntar: "Isto é uma lista de regras?" Ele responderá à pergunta afirmativamente. Se alguém então perguntar: "Existe ali alguma contradição?" A resposta é: "Não." "Mas pode aparecer alguma?" "Eu não sei; depende do que você fizer com isto. Você já pode mostrar como? Se não, então você ainda não tem certeza; então você tem que se organizar de tal maneira que não apareça nenhuma."

Na lógica, somos rigorosamente contra a contradição na medida em que queremos ter uma lista das regras, e não alguma coisa que não tenha uma lista. Além do mais, só há contradição na lógica no caso de que "p" e "~ p". Segue-se que apenas o cálculo que a lógica fornece é decisivo para saber se algo é logicamente permitido ou logicamente proibido. Todas as outras interpretações e transformações não concernem à lógica.

Suponhamos que tenho a proposição "q" e dou a regra: "q. ~ p≡ q "(ou seja, de "q" segue-se que "~ p"). Posso dar esta regra ou não. Vamos supor que eu tivesse "p" antes, então a lógica diz: você não pode dar esta regra! ("q" = "A soma dos ângulos é 180°" ⟨e⟩ "p" = "A soma dos ângulos é 181°" estão próximos um do outro. Somente quando eu dou a regra: "q . ~ p ≡ q", *é que então* surge a contradição, não antes!) Portanto, haverá uma contradição onde eu dou a regra de que se "p" e "~ p" aparecerem, não tenho, de todo modo, permissão para fazer isto.

O que é enganoso é a crença de que tudo acontece inevitavelmente, quer gostemos ou não escorregamos desesperadamente para o abismo. Não somos levados inevitavelmente? Em certo sentido, sim. Mas de que jeito? Por uma analogia: não por meio do cálculo, mas por meio de certas condições não ditas às quais queremos ajustar o cálculo. Por exemplo: ela deixa de ser uma geometria (a soma dos ângulos deve ter apenas um valor). Resumindo, há outro personagem que me leva até aqui. Mas a contradição em si é algo que sempre posso evitar.

É diferente quando nomeio uma determinada fórmula do cálculo de contradição. Claro que posso fazer isto. Mas quando digo: esta fórmula não deve ocorrer, dei outra regra, ou seja, mudei o jogo. A questão de saber se tal fórmula ocorre é um problema puramente matemático. Não tem nada a ver com o logicamente permitido e o logicamente proibido.

kann ich immer vermeiden.

Anders verhält es sich, wenn ich Widerspruch eine bestimmte Formel im Kalkül nenne. Das kann ich natürlich tun. Aber wenn ich sage: Diese Formel darf nicht auftreten, so habe ich damit eine weitere Regel gegeben, also das Spiel geändert. Die Frage, ob eine solche Formel auftritt, ist ein rein mathematisches Problem. Mit logisch erlaubt und logisch verboten hat das nichts zu tun.

Gleichnis: »Die Extension« von π

Ich rechne z. B. mit Dezimalzahlen, die nie vier Siebener hintereinander enthalten. Vorläufig ist das Unsinn. Ich habe ja gar keinen Weg herauszufinden, was ich rechnen darf und was nicht. Dagegen kann ich eine andere Regel aufstellen. Ich könnte sagen: Wenn einmal vier Siebener hintereinander auftreten, dann werde ich diese Zahl nicht mehr verwenden. Was heißt das, wenn es einmal geschieht? Das ergibt eigentlich nicht das Bild eines Kalküls, weil das gleichsam von der Zeit abhängt. Die erste Bedingung war nur eine Scheinbedingung. Es heißt gar nichts. Ich kann nicht sagen: Ich werde nur mit der Zahl rechnen, *wenn* .... - es sei denn, daß ich ein Kriterium habe, um festzustellen, ob diese Bedingung erfüllt ist. Sonst heißt es nichts.

Was hier verwechselt wird, ist das *Gesetz* von π und die *Extension* von π. Es gibt nur endliche Extensionen von π, aber nicht *die* Extension von π. Ich kann wohl sagen: Ich schreibe nur solche Extensionen von π hin, die keine vier Siebener enthalten. Aber ich kann nicht sagen: Ich will nur mit solchen Zahlen rechnen, in deren *Gesetz* keine vier Siebener vorkommen, und diese Verwechslung wird hier begangen.

Diesem Gleichnis entspricht der Fall, daß man sagt: Das Spiel kommt zu einer Art Abschluß, wenn eine bestimmte Figur entsteht, die ich Widerspruch nenne. Dann habe ich eben das Spiel von vornherein so bestimmt. Von einem Widerspruch in dem Sinne, in welchem er das Spiel unmöglich macht, ist hier überhaupt keine Rede.

⟨*Der Begriff des Kalküls*⟩

Wogegen ich mich in diesem Zusammenhang wenden möchte, ist die Ansicht, daß man bestimmen kann, was ein Kalkül ist. Der eine Kalkül ist gerade so gut wie der andere. Einen Kalkül kann man nur beschreiben, man kann nichts von ihm fordern.

Das Wort »Kalkül« hat eine verschiedene Bedeutung: Es gibt verschiedene Kalküle, so wie es verschiedene Regelverzeichnisse gibt. Damit meine ich nicht: verschiedene Rechnungen, sondern verschiedene Kalkül*arten*. Der Begriff Kalkül selbst ist vieldeutig.

Was hier immer miteinander verwechselt wird, ist folgendes: Man sagt: Ich weiß nicht, ob ein Widerspruch auftritt. Man möchte erwidern: Es kommt aber nicht darauf an, ob *ich* es weiß, sondern, ob der *Kalkül* es weiß. Hier verhalten sich nun die Kalküle ganz verschieden.

Analogia: "A Expansão" de π

Calculo com números decimais, por exemplo, que nunca contêm quatro setes em uma linha. Por ora isto é um contrassenso. Vê-se que não tenho como descobrir o que posso e o que não posso calcular. Por outro lado, posso estabelecer outra regra. Eu poderia dizer: se alguma vez ocorrer quatro setes seguidos, não vou mais empregar este número. O que significa se alguma vez acontecer? Isso não resulta realmente na imagem de um cálculo, porque depende, por assim dizer, do tempo. A primeira condição era apenas uma condição aparente. Não significa absolutamente nada. Não posso dizer: só vou calcular com o número *se* ... - a menos que tenha um critério para determinar se esta condição é satisfeita. Caso contrário, não significa nada.

O que se confunde aqui é a lei de π com a *expansão* de π. Só existem expansões finitas de π, mas não *a* expansão de π. Posso certamente dizer: só escrevo as expansões de π que não contêm quatro setes. Mas não posso dizer: só quero calcular com os números cuja *lei* determine que não ocorra quatro setes, e esta confusão está sendo cometida aqui.

Esta analogia corresponde ao caso em que se diz: o jogo chega a uma espécie de conclusão quando surge uma certa figura que chamo de contradição. Então eu simplesmente determinei o jogo deste jeito desde o início. Não há aqui, em absoluto, nenhuma palavra sobre uma contradição no sentido de que torne o jogo impossível.

⟨*O Conceito de Cálculo*⟩

O que eu gostaria de me opor neste contexto é à visão de que se pode determinar o que é um cálculo. Um cálculo é tão bom quanto o outro. Só se pode descrever um cálculo, não se pode dele nada exigir.

A palavra "cálculo" tem diferentes significados: existem diferentes cálculos, assim como existem diferentes listas de regras. Não quero dizer com isto: diferentes maneiras de fazer contas, mas diferentes *tipos* de cálculos. O próprio conceito de cálculo é ambíguo.

O que sempre se confunde aqui é o seguinte: Diz-se: não sei se vai ocorrer uma contradição. Gostaríamos de responder: não importa se *eu* sei, mas se o *cálculo* sabe. Aqui os cálculos se comportam de maneira bem diferente.

⟨*A Prova na Geometria e na Aritmética*⟩

⟨*Der Beweis in der Geometrie und in der Arithmetik*⟩

Wenn ich die Gleichung 25 x 25 = 625 betrachte, so wird der Beweis dadurch geführt, daß ich ausmultipliziere. Die Rechnung ist der Beweis. Beweise kommen aber auch z. B. in der Geometrie Euklids vor, z. B. der Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes. Ist das nun ein Beweis in demselben Sinn wie der Beweis der obigen Gleichung? Was uns hier auffällt, ist, daß ich für den Beweis der Gleichung eine Methode habe, die ich mechanisch handhaben kann, aber nicht für den Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes. Wenn ich jemandem die Behauptung des Pythagoreischen Lehrsatzes gebe, so sieht er noch nicht, wie sie zu beweisen ist. Er muß erst nach dem Beweis suchen. Dann bedeutet aber das Wort »Beweis« in der Arithmetik und in der Geometrie etwas völlig Verschiedenes, und wir sehen nun, wie sich die Kalküle durch die Art des Beweises voneinander unterscheiden können.

Nun besteht bei allen diesen Untersuchungen die Gefahr, daß die Mathematiker so tun, als ob der Unterschied nur ein *psychologischer* wäre; als ob nämlich die ganze Verschiedenheit darin bestünde, daß wir bei einem Beweis in der Geometrie *mehr Mühe* aufwenden müßten als in der Arithmetik. Aber das ist ungefähr derselbe Irrtum, wie wenn man sagt: wir können nicht alle unendlich vielen Zahlen der Reihe hinschreiben - geradeso, als ob das *an uns läge*. In Wirklichkeit *bedeutet* eine unendliche Zahlenreihe etwas anderes als eine endliche Zahlenreihe. Und so ist es auch hier. Der Unterschied, den ich im Auge habe, ist ein logischer Unterschied. Es fragt sich nicht, ob ich mehr oder weniger leicht den Beweis finde, sondern ob *der Kalkül eine Methode* zur Führung von Beweisen kennt. (Das Wort »kennen« in dem Sinne genommen, daß man sagt: Der Kalkül mit rationalen Zahlen »kennt« andere Möglichkeiten als der Kalkül mit ganzen Zahlen.) *Das* ist der Unterschied und nicht der Grad der Schwierigkeit.

ZWEITEILUNG DES WINKELS

Wir werden uns die Frage langsam klarmachen. Um auf die Hauptsache zu kommen, gehen wir so vor: Was heißt es, einen Winkel halbieren? Darauf muß man sagen: Das kommt darauf an, was als Verifikation zugelassen wird. Gilt als Verifikation das Nachmessen, dann hat die Zweiteilung einen andern Sinn, als wenn ich als Verifikation den Beweis aus den Axiomen der Geometrie ansehe. Das Wort »Zweiteilung« hat also einen gänzlich verschiedenen Sinn; denn die empirische Zweiteilung *bedeutet* etwas ganz anderes als die Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Man kann nicht etwa sagen: Beide sind Methoden, die zum selben Ziel führen.

Zwischen beiden besteht allerdings eine Beziehung, nämlich die, daß ich die geometrische Konstruktion so anwenden kann, wie ich sie anwende, nämlich zum tatsächlichen Halbieren eines Winkels. Aber wenn das z. B. aus irgendwelchen Gründen nicht der Fall wäre, so könnte sich die Geometrie dennoch mit einem Verfahren beschäftigen, das sie »Zweiteilung des Winkels« nennt, das aber nicht zur tatsächlichen Teilung verwendet werden kann.[59] Dann würde aber auch gar nicht die Gefahr bestehen, die beiden Begriffe von Zweiteilung zu verwechseln.

Die empirische Methode kann ich auch auf die Dreiteilung übertragen. Denn es hat einen guten Sinn, auf einem Bogen zwei Striche zu ziehen, so daß sich beim Nachmessen ihre Abstände als gleich groß herausstellen. In diesem Sinne kann ich also von der Dreiteilung des Winkels sprechen. Dagegen kann ich das nicht mehr sagen, wenn die Konstruktion gemeint ist. Man meint wohl, daß man auch von der Konstruktion der Dreiteilung reden kann, und zwar in Ana-

59. Die beiden Verfahren hätten dann nichts miteinander zu tun. Es würde die Anwendung fehlen. (A. W.)

Se eu considerar a equação 25 x 25 = 625, a demonstração é dada por meio da multiplicação. O cálculo é a demonstração. Mas provas também ocorrem, por exemplo, na geometria de Euclides, por exemplo a demonstração do teorema de Pitágoras. Isto é uma prova no mesmo sentido que a demonstração da equação acima? O que nos chama a atenção aqui é que tenho um método para demonstrar a equação que posso manejar mecanicamente, mas não para a prova do teorema de Pitágoras. Se eu der para alguém a afirmação do teorema de Pitágoras, ele ainda não verá como isto pode ser demonstrado. Ele tem que procurar pela demonstração primeiro. Mas então a palavra “prova” significa algo completamente diferente na aritmética e na geometria, e agora vemos como os cálculos podem diferir uns dos outros pelo tipo de prova.

Em todas estas investigações existe o perigo de os matemáticos fingirem que a diferença é meramente *psicológica*; como se toda a diferença consistisse no fato de que teríamos despender *mais esforço* em uma prova em geometria do que em aritmética. Mas isso é quase o mesmo erro que dizer: não podemos escrever todos os números infinitos em uma linha - como se *dependesse de nós*. Na realidade, uma série infinita de números *significa* algo diferente de uma série finita de números. E assim é também aqui. A diferença que tenho em mente é uma diferença lógica. A questão não é se vou encontrar a prova mais ou menos facilmente, mas se *o cálculo* conhece *um método* para a condução de demonstrações. (A palavra “conhecer” é tomada no sentido em que se diz: o cálculo com números racionais “conhece” outras possibilidades além do cálculo com números inteiros.) *Esta* é a diferença, e não o grau de dificuldade.

BISSECÇÃO DO ÂNGULO

Vamos lentamente deixar clara para nós a questão. Para chegar ao ponto principal, procedamos assim: o que significa repartir um ângulo pela metade? Sobre isto tem-se que dizer: depende do que se permite como verificação. Se o que vale como verificação é uma nova medição, então a bissecção tem um sentido diferente do que quando vejo como verificação a demonstração a partir dos axiomas da geometria. A palavra “bissecção” tem, portanto, um sentido totalmente diferente; porque a bissecção empírica *significa* algo completamente diferente do que a construção com compasso e régua. Não se pode dizer: ambos são métodos que levam ao mesmo objetivo.

Há, no entanto, uma relação entre os dois, a saber, que posso aplicar a construção geométrica como a aplico para realmente para, a saber, repartir um ângulo pela metade. Mas se por quaisquer razões, por exemplo, não fosse o caso, a geometria ainda poderia lidar com um processo que se chama de “bissecção do ângulo”, mas que não pode ser empregado para a divisão real.[59] Mas então tampouco haveria o perigo de confundir os dois conceitos de bissecção.

Também posso transferir o método empírico à trissecção. Porque faz bastante sentido desenhar dois traços em uma folha para que, ao medi-las novamente, as distâncias entre elas sejam as mesmas. Neste sentido posso falar da trissecção do ângulo. Por outro lado, não posso mais dizer isto quando se pensa na construção. Pensa-se que também se pode falar da construção da trissecção especificamente em analogia com a bissecção. Mas aqui tem-se que perguntar: o

59. Os dois procedimentos não teriam nada a ver um com o outro. Faltaria a aplicação. (N. W.)

logie mit der Zweiteilung. Aber hier muß man fragen: Was heißt hier »Analogie«?[60] Das ist doch wieder nur ein Wort. Wenn ich z. B. sagen wollte: Ich habe fünf Sinne - ich stelle mir in Analogie einen sechsten Sinn vor - hätte ich damit etwas gesagt? (Dasselbe gilt von Helmholtz' Bemerkung, er könne sich in seinen besten Augenblicken einen vierdimensionalen Raum vorstellen oder der vierdimensionale Raum wäre analog dem dreidimensionalen vorstellbar.)[61] Hier *mißbraucht* man das Wort »Analogie« und ebenso, wenn man von der Konstruktion der Dreiteilung eines Winkels spricht. Man stellt sich dann meist vor, daß man irgendwie Hilfslinien zieht, den Zirkel einsetzt und Bogen beschreibt, das Lineal anlegt und Punkte verbindet, diese Linien zum Schnitt bringt und dergleichen. Aber in diesem äußeren Tun besteht gar nicht die Konstruktion, sondern das Wesen der Konstruktion ist die *Methode*. Spreche ich aber von der *Methode* der Zweiteilung, so kann ich gar nicht in Analogie dazu von der Methode der Dreiteilung reden; ich kann die Analogie gar nicht bilden.

Man könnte nun fragen: Woher kommt es denn, daß wir durch die Konstruktion dasselbe erreichen wie durch empirisches Probieren? Darauf würde ich sagen: Es ist ja gar nicht »dasselbe«. Das Wort »Zweiteilung« ist eben vieldeutig.

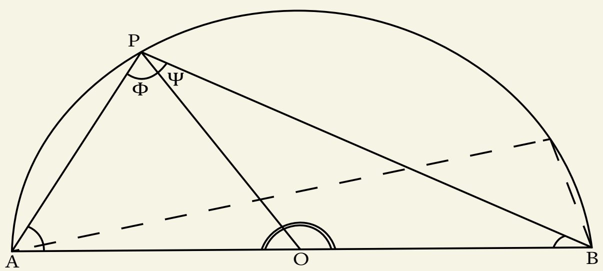
Sehe ich als Kriterium die Konstruktion an, so kann ich die Winkelteilung nicht etwa durch Nachmessen kontrollieren. Die Sache verhält sich vielmehr so: Ergibt sich beim Nachmessen ein Unterschied, so sage ich: Der Zirkel ist falsch, das war keine Gerade etc. Die Konstruktion ist ja jetzt der *Maßstab*, nach welchem ich die Güte der Messung beurteile.

Ich kann also durch die Axiome und die Konstruktion gar nichts über den Ausfall der empirischen Messung erfahren. (Die beiden haben gar nichts miteinander zu tun.)

Das ist ein Gleichnis dessen, worauf es mir hier ankommt: Ein Beweis mittels *transfiniter* Methoden und ein Beweis durch *Zahlenrechnen* brauchen keineswegs zu demselben Resultat zu führen. Ich weiß gar nicht, inwiefern sie übereinstimmen. Ich kann nur sagen: Und stimmen sie nicht überein, so besteht nicht etwa ein Konflikt zwischen zwei Beweismethoden, sondern wir haben eben ganz verschiedene Dinge bewiesen. Gemeinsam ist den beiden nur das Aussehen der Formeln, zu welchen sie führen, resp. die Gleichheit der Wörter, mit welchen wir die Formeln wiedergeben. Die Formel wird dann eben mehrdeutig sein, und das ist alles, was sich daraus ergibt. Natürlich liegt hier ein Problem vor, aber ein *mathematisches* Problem und kein philosophisches; keine Lebensfrage der Mathematik.

Wogegen ich mich in diesem Zusammenhang wenden möchte, das ist die Ansicht, daß wir *beweisen* können, daß ein System von Regeln ein Kalkül ist.

DIE ALLGEMEINHEIT IN DER GEOMETRIE



60. Siehe oben, S.163 f. (F. H.)

61. Helmholtz hat gerade das Gegenteil gesagt (*Vorträge und Reden II*, Braunschweig, 1903, S. 8 u. 28). Es muß ein anderer Mathematiker gemeint sein. (F. H.)

que significa "analogia" aqui?[60] Esta é novamente só uma palavra. Se eu, por exemplo, quisesse dizer: eu tenho cinco sentidos - imagino um sexto sentido por analogia - teria dito alguma coisa com isto? (O mesmo se aplica à observação de Helmholtz de que em seus melhores momentos ele poderia imaginar um espaço quadridimensional, ou o espaço quadridimensional poderia ser imaginado analogamente ao tridimensional.)[61] A palavra há um *mal uso* da palavra "analogia", e o mesmo ocorre quando se fala da construção da trissecção de um ângulo. Imagina-se geralmente que de alguma forma desenharam-se linhas auxiliares, coloca-se o compasso e descrevem-se arcos, delineia-se a régua e conectam-se os pontos, cortam-se estas linhas e coisas do gênero. Mas a construção não consiste nesta atividade externa, senão que a essência da construção é o *método*. Mas se falo do *método* da bissecção, então não posso falar do método da trissecção em analogia a este; não posso fazer a analogia de forma alguma.

Alguém poderia agora perguntar: de onde vem a ideia de que alcançamos o mesmo por meio da construção e do teste empírico? Então eu diria: não é "o mesmo" de forma alguma. A palavra "bissecção" é simplesmente ambígua.

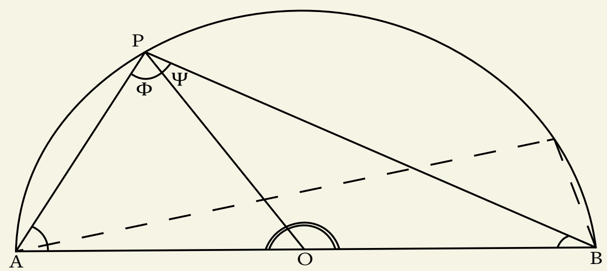
Se eu olhar para a construção como um critério, então não posso controlar a secção do ângulo pela medição. A coisa é mais ou menos assim: se houver uma diferença na medição, digo: o compasso está errado, aquela não era uma linha reta etc. A construção é agora o *padrão* pelo qual julgo a qualidade da medição.

Portanto, não posso aprender nada sobre o fracasso da medição empírica por meio dos axiomas e da construção. (Os dois não têm nada a ver um com o outro.)

Essa é uma alegoria do que é importante para mim aqui: uma prova por meio de métodos *transfinitos* e uma prova por *cálculo numérico* não precisam levar ao mesmo resultado. Eu nem sei até que ponto eles concordam. Eu só posso dizer: e se eles não concordam, então não há conflito entre dois métodos de prova, senão que demonstramos coisas muito diferentes. A única coisa que têm em comum é o aparecimento das fórmulas a que conduzem, notadamente a identidade das palavras com as quais reproduzimos as fórmulas. A fórmula será então simplesmente ambígua, e isso é tudo o que daqui resulta. Ocorre um problema aqui, é claro, mas um problema *matemático*, não filosófico; não é uma questão vital da matemática.

O que eu gostaria de contestar neste contexto é a visão de que podemos *demonstrar* que um sistema de regras é um cálculo.

A GENERALIDADE NA GEOMETRIA



60. Ver acima, p. 164s. (N. E.)

61. Helmholtz disse exatamente o contrário (*Vorträge und Reden II*, Braunschweig, 1903, pp. 8 e 28). Ele deve ter se referido a outro matemático. (N. E.)

Satz des Thales:

$$\begin{aligned} \varphi &= A \\ \psi &= B \\ \varphi + \psi &= \tfrac{1}{2}\,(\varphi + A + \psi + B) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(\sphericalangle AOP + \sphericalangle BOP) \\ &= \tfrac{1}{2} \,.\, 180^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

Man kann fragen: Beweist der Beweis für die eine Figur auch den Satz für die andere Figur mit? Oder beweise ich ihn nur für die eine Figur und dehnen wir ihn nachträglich auf die andern Dreiecke aus? Manche Mathematiker waren dumm genug, das letztere zu meinen. Der Fehler ist der: Wir handeln ja gar nicht von den Bleistiftstrichen auf dem Papier (es ist vielmehr die *Frage*, ob für diese Zeichnung der Satz überhaupt gilt), sondern die Zeichnung selbst ist ein Symbolismus, d. h. wir operieren mit den Strichen und Bleistiftflecken nach gewissen Regeln, und diese *Regeln* sind das Wesentliche, nicht die Striche. Man könnte auch so sagen: Die Striche sind ja hier gar nicht als Striche gemeint, als ein Stück Wirklichkeit, sondern als Spielfigur, für welche wir gewisse Spielregeln festgesetzt haben. Der Beweis handelt also nicht *von* der gezeichneten Figur, sondern diese ist eine Notation, in der wir den Beweis oder einen Teil von ihm sehr einfach und übersichtlich ausdrücken.[62]

Zu unterscheiden: Das Beispiel als dieser Fall und das Beispiel als Spielfall eines allgemeinen Satzes. Beides ist verschieden.

$$2\,3\,4 = 4\,5\,6$$
$$\dots 2\,3\,4\ \dots = \dots 4\,5\,6 \dots$$

Ich vergesse, daß ja noch die Pünktchen da sind.

Man tut so, als könnte man zwischen die Allgemeinheit und den Einzelfall etwas einschalten, nämlich das Beispiel. Aber entweder ist mit dem Beispiel das Beispiel gemeint und weiter nichts, oder ich sehe schon in das Beispiel die Allgemeinheit hinein. Dann ist aber das Beispiel schon der *Ausdruck* der Allgemeinheit. Und so verhält es sich hier. Die Allgemeinheit liegt nämlich in den *Regeln*, die ich vor Beginn des Spiels (also bevor etwas bewiesen wird) festgelegt habe. In diesen Regeln treten Punkt, Gerade etc. als Variable auf.

Ich möchte sagen: Die Striche und Punkte auf dem Papier bilden einen *Kalkül*, und die gezeichnete Figur, an welcher der Beweis geführt wird, ist selbst wesentlich ein *Teil* des Kalküls.[63]

INDIREKTER BEWEIS II

Der indirekte Beweis hat die Form: p . q → ~ p. Es gibt nun zwei Möglichkeiten, ihn aufzufassen: Ich kann entweder »q« aufgeben (das ist der gewöhnliche Fall) oder »p«. Beispiel: Beweis daß √2 irrational ist.

$$\sqrt{2} = m/n \ \dots\ q$$

$$(m, n) = 1 \ \dots\ p$$
$$(m, n) \neq 1 \ \dots\ {\sim}p$$

62. Auch hier ist das zeitgleich in den *Bemerkungen über Frazers Golden Bough* vorgestellte Konzept der "übersichtliche Darstellung" in Anwendung zu sehen, das in PU § 122 endgültig verankert wurde. (A. U.)

63. Hier folgt im Notizbuch ein Stück über Beweis und Hypothese in der Arithmetik, das sich auch in einem *MsBd.* Wittgensteins befindet. (F. H.)

Teorema de Tales:

$$\begin{aligned} \varphi &= A \\ \psi &= B \\ \varphi + \psi &= \tfrac{1}{2}\,(\varphi + A + \psi + B) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(\sphericalangle AOP + \sphericalangle BOP) \\ &= \tfrac{1}{2} \,.\, 180^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

Pode-se perguntar: a demonstração de uma figura também demonstra o teorema da outra figura ao mesmo tempo? Ou eu apenas o demonstro para uma figura e subsequentemente o estendemos para os outros triângulos? Alguns matemáticos foram tolos o suficiente para cogitar o último. O erro é este: não estamos lidando com marcas de lápis no papel (bem antes disto, a *questão* é se o teorema afinal se aplica a este desenho), senão que o desenho em si é um simbolismo, ou seja, operamos com as linhas e marcas de lápis de acordo com certas regras, e estas *regras* é que são essenciais, e não as linhas. Também se poderia dizer que: as linhas não são aqui pensadas como linhas, como um pedaço da realidade, mas como peça do jogo para o qual estabelecemos certas regras. Portanto, a demonstração não é *sobre* a figura desenhada, senão que esta é uma notação em que expressamos a demonstração ou parte dela de forma muito simples e panorâmica.[62]

Deve-se distinguir: o exemplo como este caso e o exemplo como caso de um jogo de proposição em geral. Ambos são diferentes.

$$2\,3\,4 = 4\,5\,6$$
$$\dots 2\,3\,4\ \dots = \dots 4\,5\,6 \dots$$

Eu acabo me esquecendo de que os pontinhos ainda estão ali.

Agimos como se pudéssemos interpor alguma coisa entre a generalidade e o caso individual, a saber, o exemplo. Mas ou o exemplo quer dizer o exemplo e nada mais, ou já enxergo a generalidade no exemplo. Mas então o exemplo já é a *expressão* da generalidade. E assim é que acontece aqui. A generalidade reside nas *regras* que estabeleci antes do início do jogo (portanto, antes de que algo fosse demonstrado). Nestas regras, pontos, linhas retas etc. ocorrem como variáveis.

Eu gostaria de dizer: as linhas e pontos no papel formam um *cálculo*, e a figura desenhada na qual a demonstração é feita é, ela mesma, essencialmente uma *parte* do cálculo.[63]

PROVA INDIRETA II

A prova indireta tem a forma: p. q → ~ p. Mas existem duas maneiras de concebê-la: posso desistir de "q" (este é o caso usual) ou de "p". Exemplo: demonstre que √2 é irracional.

$$\sqrt{2} = m/n \ \dots\ q$$

$$(m, n) = 1 \ \dots\ p$$
$$(m, n) \neq 1 \ \dots\ {\sim}p$$

62. Pode-se ver aqui também em operação o conceito de "apresentação panorâmica" apresentado nesta mesma época nas *Observações Sobre o Ramo de Ouro de Frazer*, e que veio a ser definitivamente sacramentado nas IF § 122. (N. T.)

63. Segue-se aqui no caderno de anotações uma parte sobre prova e hipóteses em aritmética que também se encontra nos manuscritos de Wittgenstein. (N. E.)

Man sagt nun: *Also* gibt es keine rationale Zahl, deren Quadrat 2 ist. Man gibt also »q« auf. Tatsächlich besteht noch eine zweite Möglichkeit. Man gibt »p« auf und müßte dann die Grammatik von »√2« ändern. Ich dürfte dann unter »√2« eben nicht das verstehen, was wir jetzt darunter verstehen.

Kennt der Kalkül eine Methode zur Auffindung künftiger Widersprüche?

Wenn ein Widerspruch gefunden wird - habe ich die Methode zu seiner Auffindung schon zu Beginn gehabt? Wenn ja, dann liegt nur ein Versäumnis vor; ich habe vergessen, alle Möglichkeiten zu prüfen. Wenn nicht: dann kommt ja gar keine Möglichkeit von einem Widerspruch in Betracht; denn der Widerspruch ist ja erst durch die Methode seiner Auffindung gegeben.[64]

64. Der Rest des Notizbuches (ungefähr 16 Seiten Kurzschrift) besteht aus Material, das sich entweder in Wittgensteins *Ms Bänden* (Auszuge davon werden späterhin veröffentlicht werden) oder in *PhB* befinden. (F. H.)

Diz-se agora: *portanto*, não há nenhum número racional cujo quadrado seja 2. Abandona-se, portanto, “q”. De fato, existe ainda uma segunda possibilidade. Abandona-se “p”, e então ter-se- ia que modificar a gramática de “√2”. Eu então não deveria compreender por “√2” o que atualmente compreendemos por isto.

O cálculo conhece algum método para descobrir contradições futuras?

Se uma contradição for encontrada, - eu já tinha o método para encontrá-la desde o início? Se sim, então existe somente um descuido; esqueci de verificar todas as possibilidades. Se não: então não há nenhuma possibilidade de considerar qualquer contradição; pois a contradição só é dada pelo método de sua descoberta.[64]

64. O resto do caderno de notas (aproximadamente 16 páginas de resumo) consiste em material que ou está nos volumes manuscritos de Wittgenstein (extratos que serão posteriormente publicados), ou se encontra nas PR. (N. E.)

TEIL VII

1. Juli 1932 (Argentinierstraße)[1]

Gespräch über die Auffassung, daß ein Satz nur mit einem Satz verglichen werden kann; z.B. die Voraussage einer Sonnenfinsternis mit dem Protokoll des Astronomen, aber kein Konfrontieren der Aussage mit der Wirklichkeit.

WITTGENSTEIN: Natürlich gibt es ein Konfrontieren des Satzes mit der Wirklichkeit. Wenn ich sage: »Da sitzen sechs Personen«, so gibt es ein Konfrontieren des Satzes, indem ich hinschaue und vergleiche:

Da, da, da, da, ... (Wittgenstein blickt dabei immer abwechselnd nach links und nach rechts.)

Ich habe in meinem Manuskript[2,3] von einem »Kollationieren« gesprochen.

Liste der Personen: Wirklichkeit:

——
——
——
——
——
——

Etwas ganz anderes ist es mit der hinweisenden Erklärung und daß *die* innerhalb der Sprache bleibt. Hier gibt es kein Konfrontieren des Zeichens mit der Wirklichkeit.

Unklar im Tractat war mir die logische Analyse und die hinweisende Erklärung. Ich dachte damals, daß es eine »Verbindung der Sprache mit der Wirklichkeit« gibt.[4]

HYPOTHESEN III

Auf einem Ruinenfeld werden Bruchstücke von Säulen, Kapitälen, Giebeln ausgegraben, und man sagt: Das war ein Tempel. Man ergänzt die Bruchstücke, füllt in Gedanken die Lücken aus, zieht die Linien nach. Das ist ein Gleichnis der Hypothese.

Die Hypothese unterscheidet sich vom Satz durch ihre Grammatik. Sie ist ein anderes grammatisches Gebilde.

1. Es gibt Grund anzunehmen, daß das Thema dieser Konversation vom Artikel Carnaps veranlaßt wurden (»Die physikalische Sprache als Universalsprache der Wissenschaft«, *Erkenntnis* 2, 1931, S. 432-65), der vom *Vergleich mit einem Protokoll* spricht, behauptet, daß *die hinweisende Erklärung innerhalb der Sprache bleibt* und *Hypothesen* diskutiert. (F. H.)
2. Das Wort kommt mehrmals in *PhGr* vor. (F. H.)
3. Eine schnelle Suche im Nachlass zeigt, dass das Wort bis 1932 in MS 109, S. 227-228 und in TS 213 (BT), S. 28 wurde verwendt. (A. U.)
4. Für einen scheinbaren Hinweis auf die hinweisende Erklärung siehe TLP 3,263; für logische Analyse siehe TLP 3,2-3,201; für die Verknüpfung von Bild und Wirklichkeit siehe TLP 2,1511. (F. H.)

PARTE VII

1 de Julho de 1932 (Argentinierstraße)[1]

Conversa sobre a concepção de que uma proposição só pode ser comparada com uma proposição; por exemplo, a previsão de um eclipse solar com o protocolo do astrônomo, mas não confrontar o enunciado com a realidade.

WITTGENSTEIN: É claro que há um confronto da proposição com a realidade. Quando digo: "Há seis pessoas sentadas ali", há um confronto com a proposição mediante o olhar para ali e a comparação:

Ali, ali, ali, ali, ... (Wittgenstein sempre olha alternadamente para a esquerda e para a direita.)

Falei de um "cotejamento" no meu manuscrito.[2,3]

Lista de pessoas: Realidade:

——
——
——
——
——
——

É uma questão completamente diferente acontece com a explicação ostensiva e que permanece *no* interior da linguagem. Aqui não há confronto do sinal com a realidade.

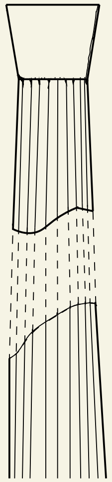
No Tractatus, a análise lógica e a explicação ostensiva não eram claras para mim. Na época pensava que havia uma "conexão entre a linguagem e a realidade".[4]

HIPÓTESES III

Em um campo arqueológico, fragmentos de colunas, capitéis e frontões são desenterrados, e dizem: isto aqui era um templo. Completam-se os fragmentos, preenchem-se as lacunas no pensamento, as linhas são desenhadas. Esta é uma analogia para a hipótese.

A hipótese se diferencia da proposição em sua gramática. Ela é uma estrutura gramatical diferente.

1. Há razões para supor que o tema desta conversação se deu sobre um artigo de Carnap (»Die physikalische Sprache als Universalsprache der Wissenschaft«, *Erkenntnis* 2, 1931, pp. 432-465), que fala sobre a *comparação com um protocolo*, e afirma que *a afirmação ostensiva permanece dentro da linguagem*, e discute *hipóteses*. (N. E.)
2. Esta palavra ocorre várias vezes nas PG. (N. E.)
3. Uma rápida pesquisa no *Nachlass* mostra que a palavra foi usada no MS 109, pp. 227-228 e no TS 213 (BT), p. 28, até 1932. (N. T.)
4. Para uma aparente alusão à explicação ostensiva, ver TLP 3.263; para análise lógica, ver TLP 3,2-3,201; para a ligação entre imagem e realidade ver TLP 2,1511. (N. E.)



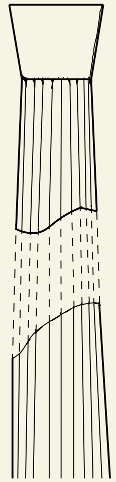
Man hatte früher immer gedacht, daß die Hypothese ein Satz ist, dessen Wahrheit nur weniger sicher feststeht. Man dachte: Bei der Hypothese haben wir noch nicht alle Fälle geprüft, wir sind daher ihrer Wahrheit weniger sicher, so, als ob das unterscheidende Kriterium sozusagen ein *historisches* wäre. Nach meiner Auffassung ist aber die Hypothese von vornherein ein ganz anderes grammatisches Gebilde.[5]

Wenn ich die Grammatik der Hypothese beschreiben sollte, so würde ich sagen: Sie folgt aus keinem singulären Satz und aus keiner Menge singulärer Sätze. Sie ist - in diesem Sinn - nie verifiziert.

Das ist nicht die Auffassung von Poincaré,[6] der in der Hypothesen Definitionen erblicken will.

5. Im PU wird diese Differenzierung gegenüber jeder anderen Grammatik dadurch begründet, dass „eine Hypothese aufstellen und prüfen“ ein spezifisches Sprachspiel unter vielen möglichen ist (vgl. PU § 23). (A. U.)

6. Poincare war dieser Ansicht, wenn es sich um die Prinzipien der Mechanik handelt (*La science et l’hypothese*, Paris, 1920, S. 122), aber nicht für jede Art der Hypothesen (ebd. S. 180 f.). (F. H.)



Antes se pensava que a hipótese era uma proposição cuja verdade era estabelecida apenas de maneira menos segura. Pensava-se: ainda não verificamos todos os casos da hipótese, por isto temos menos certeza de sua veracidade, como se o critério de diferenciação fosse, por assim dizer, *histórico*. Na minha concepção, entretanto, a hipótese é uma estrutura gramatical completamente diferente desde o início.[5]

Se eu fosse descrever a gramática da hipótese, diria: ela não decorre de nenhuma proposição singular ou de nenhum conjunto de proposições singulares. Ela nunca é - neste sentido - verificada.

Esta não é a concepção de Poincaré,[6] que quer enxergar definições nas hipóteses.

5. Nas IF, esta diferenciação em relação a qualquer outra gramática se estabelece pelo fato de que “propor uma hipótese e comprová-la” é um jogo de linguagem próprio e particular entre muitos outros possíveis (cf. IF § 23). (N. T.)

6. Poincaré era dessa opinião quando se tratava dos princípios da mecânica (*La science et l’hypothesis*, Paris, 1920, p. 122), mas não para todo tipo de hipótese (ibid. p. 180s). (N. E.)

ANHANG A[1]

GESAMTHEIT UND SYSTEM

Die Raumpunkte bilden in einem ganz andern Sinn eine »Menge« als etwa die Bücher oder die Hüte. Wir fühlen alle, daß hier ein wesentlicher Unterschied besteht, und dieser Unterschied muß einer klaren Formulierung fähig sein.

Dieser Unterschied hängt zusammen mit dem Unterschied der Worte *»sinnvoll«* und *»wahr«*. Die Menge von Hüten in diesem Zimmer wird gegeben durch eine Eigenschaft (Aussagefunktion). Kennen wir die Eigenschaft, so wissen wir damit noch nicht, ob etwas unter die Eigenschaft fällt und, falls ja, wieviel Dinge unter diese Eigenschaft fallen. Nur die Erfahrung kann dies lehren. Der Extension der Eigenschaft entspricht hier eine *Klasse von wahren Sätzen*.

Was ist ein Raumpunkt? Das erkennen wir, wenn wir auf den sinnvollen Gebrauch der Zeichen achten, welche Raumpunkte bedeuten. Ein Raumpunkt kommt in unseren Sätzen in ganz anderer Weise vor als ein Gegenstand der Wirklichkeit, nämlich immer nur als Teil einer Beschreibung, die von den Gegenständen der Wirklichkeit handelt. Ich kann die Lage eines Körpers dadurch beschreiben, daß ich angebe, in welchem Abstand er sich von bestimmten anderen Körpern befindet. Dieser Beschreibung entspricht ein möglicher Sachverhalt, gleichviel ob die Beschreibung wahr oder falsch ist. Ein Raumpunkt stellt also eine Möglichkeit dar, nämlich die Möglichkeit der Lage eines Körpers relativ zu andern Körpern. Der Ausdruck dieser Möglichkeit ist der, daß der Satz, der diese Lage beschreibt, Sinn hat. Der Gesamtheit der Raumpunkte entspricht eine Gesamtheit von Möglichkeiten, also eine *Klasse von sinnvollen Sätzen*.

Eine Klasse von wahren Sätzen wird in ganz anderer Weise begrenzt als eine Klasse von sinnvollen Sätzen. Im ersten Fall wird die Grenze durch die Erfahrung gezogen, im zweiten Fall durch die Syntax der Sprache. Die Erfahrung begrenzt die Sätze von außen, die Syntax von innen. Der *Sinnbereich* einer Funktion (d. h., die Gesamtheit der x-Werte, für welche fx sinnvoll ist) ist von innen begrenzt durch die Natur der Funktion. Und so ist auch die Klasse der Raumpunkte von innen her - durch die Syntax der räumlichen Aussagen - begrenzt.

An Russells Auffassung ist zunächst falsch, daß er die Raumpunkte aus tatsächlichen Ereignissen aufbaut. Ein solcher »Raum« reicht nämlich nur so weit, als unsere Kenntnis der tatsächlichen Ereignisse reicht. Nun ist die Gesamtheit der Raumpunkte die Gesamtheit der möglichen Lagen eines Körpers, und diese Möglichkeiten überblicken wir von vornherein. Wir können keinen Raumpunkt hinzufügen und keinen entdecken. Man kann nur *in* Raum und Zeit entdecken.

Und dies stimmt ja auch mit unserem natürlichen Gefühl überein. Wenn ein Mensch sein Le-

1. Die sechs Abschnitte dieses Anhangs sind wahrscheinlich ein Beispiel dafür, was Waismann im September 1930 auf der Konferenz zur Epistemologie der exakten Wissenschaften in Königsberg über Wittgensteins neue philosophische Auffassungen zur Mathematik zu präsentieren unternahm. Ein Auszug aus dieser Ausstellung, der sich im Besitz von Shimshon Stein, einem Freund von Paul Engelmann, befand, wurde von McGuinness in Tel Aviv gefunden. Dieser Text kursierte vermutlich in den 1930er Jahren in einem kleinen Kreis von Bekannten in Wien als eine Art Transkription von Wittgensteins Ansichten. Aufgrund des Akzents, der sehr stark auf den aprioristischen Begriff des syntaktischen Systems fällt, und des Stils selbst, der viel systematischer als dialogisch ist, ist anzumerken, dass der Text eine Übersicht über Wittgensteins Diskussionen mit dem Wiener Kreis von 1929 darstellt, und nicht genau 1930 und 1931. (A. U.)

ANEXO A[1]

TOTALIDADE E SISTEMA

Os pontos espaciais formam um “conjunto” em um sentido completamente diferente do que livros ou chapéus, por exemplo. Todos nós sentimos que há uma diferença essencial aqui, e esta diferença tem que ser capaz de uma formulação clara.

Esta diferença está relacionada à diferença entre as palavras “*ter sentido*” e “*verdadeiro*”. O conjunto de chapéus nesta sala é dado por uma propriedade (função proposicional). Se conhecemos a propriedade, ainda não sabemos se algo se enquadra na propriedade e, em caso afirmativo, quantas coisas se enquadram nesta propriedade. Somente a experiência pode ensinar isto. A extensão da propriedade corresponde aqui a uma *classe de proposições verdadeiras*.

O que é um ponto no espaço? Reconheceremos isto se prestarmos atenção ao uso com sentido dos sinais que significam pontos espaciais. Um ponto no espaço ocorre em nossas proposições de uma maneira completamente diferente de um objeto da realidade, a saber, sempre apenas como parte de uma descrição que trata de objetos da realidade. Posso descrever a posição de um corpo especificando a distância que ele está de alguns outros corpos. Um possível estado de coisas corresponde a esta descrição, independentemente de a descrição ser verdadeira ou falsa. Um ponto no espaço apresenta assim uma possibilidade, nomeadamente a possibilidade da posição de um corpo em relação a outros corpos. A expressão desta possibilidade é a de que a proposição que descreve esta situação tem sentido. A totalidade dos pontos espaciais corresponde a uma totalidade de possibilidades, ou seja, a uma *classe de proposições com sentido*.

Uma classe de proposições verdadeiras é limitada de uma maneira completamente diferente de uma classe de proposições com sentido. No primeiro caso, o limite é traçado pela experiência, no segundo pela sintaxe da linguagem. A experiência limita as proposições pelo lado de fora, a sintaxe pelo lado de dentro. O *domínio de sentido* de uma função (ou seja, a totalidade dos valores x para os quais fx é significativo) é limitado internamente pela natureza da função. E assim a classe de pontos espaciais também é limitada pelo lado de dentro - pela sintaxe dos enunciados espaciais.

O que está inicialmente errado com a visão de Russell é que ele constrói pontos espaciais a partir de eventos reais. Um “espaço” assim se estende apenas até onde se estende nosso conhecimento dos eventos reais. Ora, a totalidade dos pontos no espaço é a totalidade das posições possíveis de um corpo, e temos uma visão geral destas possibilidades desde o início. Não podemos adicionar um ponto no espaço nem descobrir nenhum. Só se pode descobrir *no* espaço e no tempo.

1. As seis seções que compreendem este anexo são provavelmente uma amostra do que Waismann se comprometeu a apresentar sobre as novas concepções filosóficas sobre a matemática de Wittgenstein, em setembro de 1930, na conferência que se realizou em Königsberg dedicada à epistemologia das ciências exatas. Um extrato desta exposição, que estava em poder de Shimshon Stein, amigo de Paul Engelmann, foi recuperado em Tel Aviv por McGuinness. Este texto provavelmente circulava na década de 1930 dentro de um pequeno grupo de conhecidos em Viena como uma espécie de transcrição das concepções de Wittgenstein. Deve-se notar pelo acento que recai muito fortemente sobre a noção apriorística de sistema sintático, e pelo próprio estilo muito mais sistemático que dialógico, que o texto é um apanhado das discussões de Wittgenstein com o Círculo de Viena que se deu em 1929, e não propriamente em 1930 e 1931. (N. T.)

ben lang in einem Zimmer eingesperrt ist: weiß er deswegen nicht, daß der Raum über das Zimmer hinausreicht? Woherweiß er das? Russell müßte hierauf erwidern: Dies ist eine Hypothese. Es ist aber klar, daß diese Antwort unsinnig ist. Denn was wir wissen, ist ja nur eine *Möglichkeit*, und diese *kann* keine Hypothese sein.

Die Erfahrung kann uns nicht das System der Möglichkeiten geben. Die Erfahrung lehrt nur was ist, nicht, was sein kann. Die Möglichkeit ist kein empirischer Begriff, sondern ein Begriff der Syntax.

Es ist der Grundfehler Russells, daß er immer wieder versucht, die Möglichkeit auf die Wirklichkeit zurückzuführen. Er verwechselt also eine *Beschreibung* mit der *Syntax* dieser Beschreibung.

Der Raum ist die Möglichkeit des Wo, die Zeit die Möglichkeit des Wann, die Zahl die Möglichkeit des Wieviel.

Wenn man Raum und Zeit - oder die Zahl - in Zusammenhang bringt mit den zufälligen Eigenschaften der Welt, so zeigt das schon, daß man auf ganz verkehrtem Weg ist.

Raum, Zeit und Zahl sind *Formen* der Darstellung. Sie sollen jede mögliche Erfahrung zum Ausdruck bringen und darum ist es verkehrt, sie auf die tatsächliche Erfahrung zu begründen.

Auch wenn es in unserer Welt keine Klasse von der oder jener Anzahl geben sollte, so hat es doch Sinn, solche Klassen zu betrachten. Wir dürfen keine Möglichkeit von vornherein ausschließen, dies aber geschieht, wenn man mit Russell die Zahlen als Klassen *tatsächlicher* Eigenschaften definiert.

Wenn Russell recht hätte, dann hätten die beiden Aussagen: »Im Zeitpunkt t spielt sich das Ereignis A ab« und »Im Zeitpunkt t spielt sich das Ereignis B ab« denselben Sinn.

Zweitens ist an der Russellschen Auffassung falsch, daß er glaubt, man könnte zunächst die Raumpunkte aus tatsächlichen Ereignissen aufbauen und dann die so konstruierten Raumpunkte in eine Ordnung bringen. In Wirklichkeit sind die Raumpunkte schon von vornherein geordnet, und es ist unmöglich, sie ohne diese Ordnung zu denken.

Eine räumliche Angabe verstehen wir, ohne daß wir eine Kenntnis der tatsächlichen Ereignisse zu besitzen brauchen. Wenn ein Satz genügt, um die Lage eines Körpers zu beschreiben, dann muß dieser Satz schon *alles* enthalten, was sich auf die Lage bezieht, und was in diesem Satz nicht vorkommt, kann für die Angabe der Lage auch nicht von Bedeutung sein.

Können wir einen Raumpunkt in der Weise beschreiben, daß wir angeben, welche Gegenstände sich an dieser Raumstelle befinden? Nein! Denn wir wissen nicht, wie wir zu diesem Raumpunkt gelangen sollen.

Es liegt im Wesen einer räumlichen Angabe, daß sie uns den *Weg angibt*, wie wir zu einer Raumstelle gelangen. Einen Raumpunkt angeben, heißt eine Methode angeben, um zu dem Raumpunkt zu gelangen.

Dann muß aber die Angabe eines Raumpunktes schon die Beziehungen zu den andern Raumpunkten enthalten, und das heißt: *Die Beziehungen zwischen den Raumpunkten sind intern*. Wenn wir die Raumpunkte richtig einführen, so müssen wir sie mit einem Schlag samt allen ihren Beziehungen einführen.

Ebenso verhält es sich mit der Zeit. Wenn ich weiß, *welche* Ereignisse sich in einem Zeitpunkt abspielen, so weiß ich noch nicht, *wann* sich die Ereignisse abspielen. Die Angabe der Zeit ist die Angabe des Wann und nicht die Angabe der Gleichzeitigkeit.

Der Unterschied zwischen der Menge von Stühlen in diesem Zimmer und der Menge der Raumpunkte geht zurück auf den Unterschied zwischen »*Funktion*« und »*Operation*«.

Daß es Mengen von einer ganz anderen Art gibt, zeigen schon die logischen Partikeln. Wir kennen die Operation, die alle logischen Partikeln entstehen läßt. Haben wir nur einmal *eine*

E isto também está de acordo com o nosso sentimento natural. Se uma pessoa fica trancada em um quarto por toda a vida, seria por causa disto que ela não saberia que o espaço se estende para além do quarto? Como ele sabe disto? Russell teria que responder: esta é uma hipótese. Mas é claro que essa resposta é absurda. Porque o que sabemos é apenas uma *possibilidade*, e isto não *pode* ser uma hipótese.

A experiência não pode nos dar o sistema de possibilidades. A experiência apenas ensina o que está ali, não o que pode ser. A possibilidade não é um conceito empírico, mas um conceito da sintaxe.

O erro fundamental de Russell é que ele sempre tenta levar de volta a possibilidade para a realidade. Portanto, ele confunde uma *descrição* com a *sintaxe* desta descrição.

O espaço é a possibilidade do onde, o tempo é a possibilidade do quando, o número é a possibilidade do quanto.

Se colocarmos espaço e tempo - ou o número - em conexão com as propriedades acidentais do mundo, isto já mostra que tomamos um caminho muito errado.

Espaço, tempo e número são *formas* de apresentação. Elas dvem trazer todas as experiências possíveis à expressão, e por isto é equivocado baseá-los na experiência real.

Mesmo que não deva haver nenhuma classe deste ou daquele número em nosso mundo, ainda faz sentido considerar tais classes. Não devemos excluir em princípio qualquer possibilidade, mas é o que acontece quando, com Russell, os números são definidos como classes de propriedades *reais*.

Se Russell estivesse certo, então as duas afirmações: “O evento A ocorre no tempo t” e “O evento B ocorre no tempo t” teriam o mesmo sentido.

Em segundo lugar, o que está errado com a concepção de Russell é que ele acredita que se pode primeiro construir os pontos no espaço a partir de eventos reais e, em seguida, colocar os pontos no espaço assim construídos em uma ordem. Na realidade, os pontos no espaço já estão ordenados desde o início, e é impossível pensar neles sem esta ordem.

Compreendemos informações espaciais sem precisar ter nenhum conhecimento dos eventos reais. Se uma proposição é suficiente para descrever a posição de um corpo, então esta proposição já deve conter *tudo* o que se relaciona com a posição, e o que não ocorre nesta proposição não pode ser importante para a especificação da posição.

Podemos descrever um ponto no espaço de forma a especificar quais objetos estão localizados neste ponto do espaço? Não! Porque não sabemos como devemos chegar a este ponto do espaço.

É da natureza de uma especificação espacial que ela nos *indique* o caminho para chegar a um lugar no espaço. Especificar um ponto no espaço significa especificar um método para chegar ao ponto no espaço.

Então a especificação de um ponto no espaço já deve conter as relações com os outros pontos no espaço, e isto significa: *as relações entre os pontos no espaço são internas*. Se introduzirmos os pontos no espaço corretamente, temos que introduzi-los junto com todos seus relacionamentos de uma só vez.

Acontece o mesmo com o tempo. Se eu sei *quais* eventos estão ocorrendo em um determinado ponto no tempo, ainda não sei *quando* os eventos ocorrerão. A indicação do tempo é a indicação do quando e não a indicação da simultaneidade.

A diferença entre o conjunto de cadeiras nesta sala e o conjunto de pontos espaciais remonta à diferença entre “*função*” e “*operação*”.

As partículas lógicas já mostram que existem conjuntos de um tipo completamente diferente. Conhecemos a operação que dá origem a todas as partículas lógicas. Se apenas uma vez logische Partikel vollkommen durchschaut, so kennen wir *alle* logischen Partikeln. Es ist undenkbar, eine weitere logische Partikeln zu entdecken. Sie sind - in gewissem Sinn - alle zugleich da. Sie bilden ein System, dessen Umfang und Grenzen wir von vornherein vollkommen klar überblicken.

Ich unterscheide zwischen »*empirischer Gesamtheit*« und »*System*« .

Die Bücher und Stühle in diesem Zimmer sind empirische Gesamtheiten. Ihre Extension hängt ab von der Erfahrung. Die logischen Partikeln, die Zahlen, die Raum- und die Zeitpunkte sind Systeme. Es ist undenkbar, eine neue logische Partikel, eine neue Zahl, einen neuen Raumpunkt zu entdecken. Hier haben wir das Gefühl, daß alles aus *einer* Wurzel entspringt. Kennen wir das Prinzip, das einem System zu Grunde liegt, so kennen wir das *ganze* System.

Eine empirische Gesamtheit geht zurück auf eine *Aussagefunktion*; ein System auf eine *Operation*.

Die logischen Partikeln sind Wahrheitsoperationen. So ist die Bedeutung des Wortes »oder« die Operation, die aus dem Sinn der Sätze »p«, »q« den Sinn des Satzes »p oder q« macht. Diese Operation findet ihren Ausdruck im Bau der Wahrheitsfunktion. Die Wahrheitsfunktionen lassen sich systematisch bilden. Die Zahlen entstehen durch fortgesetzte Anwendung der Operation + 1.

Die Operation tritt dort auf, wo wir es mit Satzformen zu tun haben, die nach einem formalen Gesetz geordnet sind. So sind die Aussagen

aRb
(∃x) aRx . xRb
(∃x, y) aRx . xRy . yRb

nach einem formalen Gesetz geordnet. Die Operation ist der Übergang von einer Satzform zu einer andern. Sie läßt aus der einen Satzform die andere entstehen. Kennt man die Operation, so kann man, von einer Satzform ausgehend, alle andern erzeugen.

Operation und Funktion sind völlig verschieden. Eine Funktion kann nicht ihr eigenes Argument sein. Eine Operation kann dagegen auf ihr eigenes Resultat angewendet werden.

In der Mathematik müssen wir es immer mit Systemen zu tun haben und nicht mit Gesamtheiten. Der Grundfehler Russells besteht darin, daß er das Wesen eines *Systems* nicht erkannt hat, sondern daß er unterschiedslos empirische Gesamtheiten und Systeme durch dasselbe Symbol - die Aussagefunktion - darstellt.

Einen Raumpunkt kennen wir, wenn wir den Weg kennen, der zu diesem Raumpunkt führt. Dieser Weg wird gegeben durch eine Satzform (z. B. 10 Schritte nach vorn, dann 5 Schritte nach rechts). Der Gesamtheit der Raumpunkte entspricht die Gesamtheit der möglichen Wege, also die Gesamtheit der Satzformen. Diese konstruieren wir und deshalb überblicken wir alle Möglichkeiten. Nur was wir selbst erzeugen, können wir vorhersehen. Dies rechtfertigt unser Gefühl: daß wir keinen Raumpunkt entdecken können. Das bedeutet nämlich: Wir können keine Satzform entdecken.

Dies macht auch klar, warum die Beziehungen zwischen den Raumpunkten *intern* sind. Die Beziehungen zwischen den Raumpunkten sind die Beziehungen zwischen den Satzformen, welche den Raumpunkten entsprechen. Jede Satzform steht zu jeder andern in einer internen Beziehung.

Die Unendlichkeit des Raumes ist die Unendlichkeit der mathematischen Induktion.

Es ist ja klar, daß wir mit der Unendlichkeit des Raumes nichts *Tatsächliches* ausdrücken. Was wir a priori wissen, ist - hier wie überall - die *Form*, in der wir die Erfahrungen darstellen.

Hier erhebt sich die Frage, ob wir zur Aufstellung der Syntax nicht auch Erfahrungen brauchen. Hierauf ist zu erwidern: Es gibt zwei völlig verschiedene Begriffe von »Erfahrung« . Die

vimos completamente *uma* partícula lógica, conhecemos *toda*s as partículas lógicas. É impensável descobrir outra partícula lógica. Eles estão - em certo sentido - todas lá ao mesmo tempo. Elas formam um sistema, de cujo escopo e limites temos uma visão geral clara desde o início.

Eu distingo entre "*totalidade empírica*" e "*sistema*".

Os livros e cadeiras nesta sala são totalidades empíricas. Sua extensão depende da experiência. As partículas lógicas, os números, os pontos espaciais e temporais são sistemas. É impensável descobrir uma nova partícula lógica, um novo número, um novo ponto no espaço. Aqui temos a sensação de que tudo surge de *uma* raiz. Se conhecemos o princípio no qual um sistema se baseia, conhecemos *todo* o sistema.

Uma totalidade empírica remonta a uma *função proposicional*; um sistema a uma *operação*.

As partículas lógicas são operações de verdade. Assim, o significado da palavra "ou" é a operação que transforma o sentido das proposições "p", "q" no sentido da proposição "p ou q". Esta operação encontra sua expressão na construção das funções de verdade. As funções de verdade podem ser formadas sistematicamente. Os números resultam da aplicação continuada da operação + 1.

A operação ocorre quando estamos lidando com formas proposicionais ordenadas de acordo com uma lei formal. Assim, os enunciados

aRb
(∃x) aRx . xRb
(∃x, y) aRx . xRy . yRb

são ordenados segundo uma lei formal. A operação é uma transição de uma forma proposicional para outra. Ela permite que uma forma proposicional surja da outra. Se uma pessoa conhece a operação, ela pode, ao passar por uma forma proposicional, gerar todas as outras.

A operação e a função são completamente diferentes. Uma função não pode ser seu próprio argumento. Uma operação, por outro lado, pode ser aplicada ao seu próprio resultado.

Em matemática, sempre temos que lidar com sistemas e não com totalidades. O erro fundamental de Russell consiste em que ele não reconhece a essência de um *sistema*, senão que apresenta indiscriminadamente totalidades empíricas e sistemas através do mesmo símbolo - a função proposicional.

Conhecemos um ponto no espaço se conhecermos o caminho que leva a este ponto no espaço. Este caminho é fornecido por uma forma proposicional (por exemplo, 10 passos à frente e 5 passos à direita). A totalidade dos pontos espaciais corresponde à totalidade dos caminhos possíveis, portanto à totalidade das formas proposicionais. Nós as construímos e, portanto, temos uma visão geral de todas as possibilidades. Só o que nós mesmos produzimos é o que podemos prever. Isto justifica o nosso sentimento: de que não podemos descobrir nenhum ponto no espaço. O que, a saber, significa: não podemos descobrir nenhuma forma proposicional.

Isto também deixa claro por que as relações entre os pontos no espaço são *internas*. As relações entre os pontos no espaço são as relações entre as formas proposicionais que correspondem aos pontos no espaço. Toda forma proposicional tem uma relação interna com todas as outras.

O infinito do espaço é o infinito da indução matemática.

É claro que não estamos expressando nada *factual* com o infinito do espaço. O que sabemos a priori é - aqui como em todo lugar - a *forma* como apresentamos as experiências.

Aqui surge a questão de saber se também não precisamos das experiências para estabelecer a sintaxe. A resposta para isto é: existem dois conceitos completamente diferentes de "experiência". A experiência de que precisamos para estabelecer a verdade de um enunciado é muito diferente daquela de que precisamos para compreender o significado de uma palavra. Só o pri-

Erfahrung, die wir benötigen, um die Wahrheit einer Aussage festzustellen, ist eine ganz andere, als die wir zum Verstehen der Bedeutung eines Wortes brauchen. Nur die Erfahrung erster Art wird in Sätzen ausgesprochen.

GLEICHUNG UND TAUTOLOGIE

Mathematik und Logik haben in der Tat etwas gemeinsam. Das Richtige an Russells Idee besteht darin, daß wir es sowohl in der Mathematik wie in der Logik mit *Systemen* zu tun haben. Beide Systeme gehen zurück auf Operationen.

Falsch hieran ist der Versuch, die Mathematik als einen Teil der Logik aufzufassen.

Die wahre Analogie zwischen Mathematik und Logik ist eine ganz andere: Der Operation, die aus dem Sinn gegebener Sätze einen neuen Sinn erzeugt, entspricht auch in der Mathematik eine Operation, nämlich die Operation, die aus gegebenen Zahlen eine neue Zahl erzeugt. Das heißt: *Der Wahrheitsfunktion entspricht die Zahl*.

Die logischen Operationen werden an Sätzen ausgeführt, die arithmetischen an Zahlen. Das Ergebnis einer logischen Operation ist ein *Satz*, das Ergebnis einer arithmetischen eine *Zahl*.

Die Analogie zwischen Logik und Arithmetik findet nun dadurch ein Ende, daß die Arithmetik *Gleichungen* zwischen Zahlen betrachtet. *Die Gleichheit ist keine Operation*. In 7 + 5 =3 + 9 sind 7 + 5 und 3 + 9 der Ausdruck von Operationen; aber nicht die Gleichheit, d. h. die Anzeige, daß verschiedene Operationen zu demselben Ergebnis führen. Das, was einer Gleichung zwischen Zahlen in der Logik entsprechen würde, wäre nicht eine Wahrheitsfunktion, sondern die Aussage, *daß zwei Wahrheitsfunktionen dasselbe bedeuten*. Aber diese Aussage gibt es nicht.

Es scheint, daß es doch eine solche Aussage gibt, nämlich die *Tautologie*, p ≡ q. Man kommt so zu der Auffassung, daß der Gleichung die Tautologie entspricht. Das ist jedoch nicht der Fall.

Wir können einen Gedanken auf verschiedene Art ausdrücken. So sagt z. B. p ⊃ q dasselbe wie ~q ⊃ ~p. Um das festzustellen, brauchen wir nur die beiden Aussagen als Wahrheitsfunktionen anzuschreiben; dann *zeigt* der bloße Anblick der beiden Funktionen, daß sie Zeile für Zeile übereinstimmen. Wir können es aber auch so zeigen, daß wir die Aquivalenz der beiden Aussagen (p ⊃ q) ≡ (~ q ⊃ ~p) bilden und feststellen, daß diese eine Tautologie ist. *Sagt* nun die Tautologie, daß diese beiden Aussagen dasselbe bedeuten? Nein! Die Tautologie zeigt nur, was sich auch ohne Tautologie gezeigt hat, nämlich daß die Strukturen der beiden Wahrheitsfunktionen übereinstimmen; sie zeigt es nur auf eine andere Weise.

Die Tautologie ist also nur eine Methode, um die Übereinstimmung zweier Wahrheitsfunktionen leichter zu erkennen. Nicht die Tautologie ist das Wesentliche, sondern das, *was sich an der Tautologie zeigt*.

Daß p ≡ q eine Tautologie ist, *zeigt*, daß p und q dasselbe bedeuten. Daß p ⊃ q eine Tautologie ist, *zeigt*, daß q aus p folgt. Daß ~(p . q) eine Tautologie ist, *zeigt*, daß p und q einander widersprechen.

Das Charakteristische an der Verwendung der Tautologie ist, daß wir nie die Tautologie selbst gebrauchen, um mit dieser Satzform etwas auszudrücken, sondern daß wir uns ihrer nur als einer Methode bedienen, um an ihr logische Beziehungen zwischen andern Aussagen sichtbar zu machen.

Wären wir blind, so könnte uns auch das Fernrohr nicht sehend machen; würde nicht schon die Sprache alles Logische zeigen, so könnte uns auch die Tautologie nichts lehren.

Der Methode der Tautologie entspricht in der Mathematik der Beweis einer Gleichung. Dasselbe Moment, das bei den Tautologien verwendet wird - nämlich das Sichtbarmachen der Übereins-

meiro tipo de experiência é expresso nas proposições.

EQUAÇÃO E TAUTOLOGIA

De fato, matemática e lógica têm algo em comum. O que está correto na ideia de Russell é que estamos lidando com *sistemas* tanto em matemática quanto em lógica. Ambos os sistemas retrocedem a operações.

É errado tentar compreender a matemática como parte da lógica.

A verdadeira analogia entre matemática e lógica é completamente diferente: a operação que gera um novo sentido a partir do sentido das proposições dadas também corresponde na matemática a uma operação, a saber, a operação que gera um novo número a partir de números dados. Isto significa: *o número corresponde à função de verdade*.

As operações lógicas são realizadas em proposições, as operações aritméticas em números. O resultado de uma operação lógica é uma *proposição*, o resultado de uma operação aritmética é um *número*.

A analogia entre lógica e aritmética chega ao fim quando a aritmética considera *equações* entre números. *A igualdade não é uma operação*. Em 7 + 5 = 3 + 9, 7 + 5 e 3 + 9 são expressão das operações; mas não igualdade, isto é, a indicação de que diferentes operações produzem o mesmo resultado. O que corresponderia a uma equação entre números na lógica não seria uma função de verdade, mas a afirmação de *que duas funções de verdade significam a mesma coisa*. Mas não existe tal afirmação.

Parece que existe, afinal, uma afirmação assim, a saber, a *tautologia* p ≡ q. É assim que se chega-se à conclusão de que a equação corresponde à tautologia. No entanto, este não é o caso.

Podemos expressar um pensamento de várias maneiras. Portanto, dizer, por exemplo, que p ⊃ q é o mesmo que ~ q ⊃ ~ p. Para estabelecer isto, só precisamos escrever os dois enunciados como funções de verdade; então, a mera visão das duas funções *mostra* que elas concordam linha por linha. Mas também podemos mostrá-lo de maneira que formemos a equivalência dos dois enunciados (p ⊃ q) ≡ (~ q ⊃ ~p), e estabeleçamos que isto é uma tautologia. A tautologia agora *diz* que os dois enunciados significam a mesma coisa? Não! A tautologia mostra apenas o que foi mostrado mesmo sem tautologia, a saber, que as estruturas das duas funções de verdade coincidem; ela só mostra isto de uma maneira diferente.

A tautologia, portanto, é apenas um método para reconhecer mais facilmente a concordância de duas funções de verdade. O essencial não é a tautologia, mas *o que se mostra na tautologia*.

O fato de que p ≡ q seja uma tautologia *mostra* que p e q significam a mesma coisa. O fato de que p ⊃ q seja uma tautologia *mostra* que q segue de p. O fato de que ~ (p . q) seja uma tautologia *mostra* que p e q se contradizem.

O característico no emprego da tautologia é que nunca usamos a própria tautologia para expressar algo com esta forma proposicional, mas apenas a usamos como um método para tornar visíveis as relações lógicas entre outros enunciados.

Se fôssemos cegos, o telescópio também não nos faria ver; se a linguagem já não mostrasse todo o lógico, a tautologia também não poderia nos ensinar nada.

O método da tautologia corresponde na matemática à demonstração de uma equação. O mesmo fator que é empregado nas tautologias - a saber, tornar visível a concordância entre duas estruturas - este fator também é empregado na demonstração da equação. Quando demonstramos timmung zweier Strukturen - dieses Moment wird auch beim Beweis der Gleichung verwendet. Wenn wir eine Zahlenrechnung beweisen, so formen wir die beiden Seiten so lange um, bis sich ihre Gleichheit *zeigt*. Das ist tatsächlich dasselbe Verfahren, auf dem die Verwendung der Tautologien beruht.

Etwas an dieser Auffassung ist also richtig. *Die Gleichung ist keine Tautologie*. Wohl aber liegt dem *Beweis der Gleichung* dasselbe Prinzip zugrunde, auf dem die Verwendung der Tautologie beruht.

Gemeinsam ist der Mathematik und Logik, daß der Beweis kein Satz ist, sondern daß der Beweis etwas *demonstriert*. Die Logik demonstriert *an Sätzen*, die Mathematik *an Zahlen*.

Es ist bis zu einem gewissen Grad wahr, daß die Mathematik auf Anschauung beruht; nämlich auf der *Anschauung der Symbole*; und dieselbe Anschauung wird in der Logik bei der Verwendung der Tautologie benutzt.

BEGRIFF UND FORM[2]

Der Satz ist nicht ein Zeichen für einen Sachverhalt, er beschreibt ihn. Der Satz kann auch gedachte Sachverhalte beschreiben, deshalb ist er kein Name. Die Syntax ist die Gesamtheit der Regeln, die angeben, in welchen Verbindungen ein Zeichen Bedeutung hat. Sie beschreibt nichts, sie begrenzt das Beschreibbare. Das Symbol ist das sinnlich wahrnehmbare Zeichen und die Regeln seiner Verwendung, seiner Syntax. Das Sprachverständnis setzt voraus die Kenntnis der Bedeutung und der Syntax der Zeichen. Unsinn sein heißt antisyntaktisch sein. Die Philosophie ist die Klärung der Sprachsyntax. Sie gibt Verstehen von Sätzen.

Die Form des Satzes ergibt sich, beim Absehen von der Bedeutung der Worte, bei ihrer Verwandlung in Variable. Ein Subjekt-Prädikat Satz hat eine andere Form als ein Relationssatz; ein symmetrischer Relationssatz eine andere als ein asymmetrischer. Der Sachverhalt ist eine Verbindung von Dingen. Die Dinge werden durch Zeichen im Satz vertreten, die Form des Sachverhaltes nicht, sie wird durch die Form des Satzes aufgewiesen. Ein Begriff muß erklärt werden, die Form des Satzes zeigt sich. Die Form ist nicht beschreibbar, denn die Beschreibung stellt die Form dar. Form haben heißt Bild sein; Denken oder Sprechen heißt Abbilden. Begriffe werden durch Zeichen ausgedrückt. Die Form, das Satzbild, zeigt sich. Die Form ist keine Verallgemeinerung und keine einer Klasse von Sätzen gemeinsame Eigenschaft. Symmetrie und Asymmetrie zeigen sich in den Sätzen, sind in der Beschreibung enthalten - sie sind nicht Eigenschaften wie gelb und hart, die benannt durch eine Aussagefunktion ausgedrückt werden. Asymmetrisch ist nicht der Sachverhalt, sondern die Zeichenverbindung, durch die er dargestellt wird. Die Asymmetrie bezieht sich nicht auf die Wirklichkeit, sondern auf die syntaktische Form der Beschreibung der Wirklichkeit; sie deutet an, welche Züge die Symbolik haben muß, um den Sachverhalt abzubilden. Worte, die Formen bezeichnen, sind keine Begriffe, sondern Anweisungen zur Konstruktion einer Symbolik, d. h., von logischen Bildern.

WAS IST EINE ZAHL?

Definitionen sind Wegzeichen. Sie weisen den Weg zur Verifikation.

Die Forderung der Verifizierbarkeit ist die Forderung, daß alle Symbole definiert sind und

2. Dieser Abschnitt stammt aus den Notizen von Herrn Stein. (F. H.)

um cálculo numérico, transformamos os dois lados até que se *mostre* a sua igualdade. Este é, de fato, o mesmo procedimento em que se baseia o emprego das tautologias.

Portanto, há *algo* nesta concepção que está correto. *A equação não é uma tautologia*. Mas a demonstração da equação é baseada no mesmo princípio em que se baseia o emprego da tautologia.

O que a matemática e a lógica têm em comum é que a prova não é uma proposição, mas que a prova *demonstra* algo. A lógica demonstra *com proposições*, a matemática *com números*.

É verdade até certo ponto que a matemática se baseia numa intuição; nomeadamente na *intuição dos símbolos*; e a mesma intuição vem a ser utilizada na lógica pelo emprego da tautologia.

CONCEITO E FORMA[2]

A proposição não é um sinal para um estado de coisas, ela o descreve. A proposição também pode descrever estados de coisas imaginários, por isto ela não é um nome. A sintaxe é o conjunto de regras que especificam em quais conexões um sinal tem significado. Ela nada descreve, delimita o descritível. O símbolo é o sinal perceptível pelos sentidos e as regras do seu emprego, a sua sintaxe. Compreender a linguagem pressupõe o conhecimento do significado e da sintaxe dos sinais. Ser um contrassenso significa ser antissintático. A filosofia é o esclarecimento da sintaxe da linguagem. Ela fornece a compreensão das proposições.

A forma da proposição resulta, desconsiderado o significado das palavras, do emprego destas em variáveis. Uma proposição sujeito-predicado tem uma forma diferente de uma proposição relacional; uma proposição relacional simétrica é diferente de uma assimétrica. O estado de coisas é uma conexão entre as coisas. As coisas são representadas por sinais na proposição, a forma do estado de coisas não é representada, ela é mostrada pela forma da proposição. Um conceito tem que ser explicado, a forma da proposição se mostra. A forma não é descritível porque a descrição apresenta a forma. Ter uma forma significa ter uma imagem; pensar ou falar significa afigurar. Os conceitos são expressos por meio de sinais. A forma, a imagem proposicional, se mostra. A forma não é uma generalização e não é uma propriedade comum a uma classe de proposições. A simetria e a assimetria mostram-se nas proposições, estão contidas na descrição - não são propriedades como amarelo e duro, que são expressas por uma função proposicional. Não é o estado de coisas que é assimétrico, mas a combinação de sinais através dos quais ele é apresentado. A assimetria não se refere à realidade, mas à forma sintática da descrição da realidade; ela indica quais características o simbolismo deve ter para afigurar os estados de coisas. Palavras que designam formas não são conceitos, mas instruções para a construção de um simbolismo, isto é, das imagens lógicas.

O QUE É UM NÚMERO?

As definições são placas de sinalização. Eles indicam o caminho para a verificação.

O requisito de verificabilidade é o requisito de que todos os símbolos sejam definidos e que

2. Esta seção provém das notas do Sr. Stein. (N. E.)

daß wir die Bedeutung der undefinierbaren Symbole verstehen.

Was durch die Definition erklärt wird, ist die Verwendung eines Zeichens im Satz. Die Definition erklärt den Satz*sinn*.

Die Definition ist eine Umformungsregel. Sie gibt an, wie ein Satz umzuformen ist in andere Sätze, in welchen der betreffende Begriff nicht mehr vorkommt.

Die Definition führt einen Begriff auf einen oder mehrere andere zurück, diese wieder auf andere u. s. f. Die Richtung dieser Zurückführung ist bestimmt durch die Methode der Verifikation.

Definitionen, die diesen Zweck nicht erfüllen, sind bedeutungslos.

Nach dem Frege-Russellschen Abstraktionsprinzip ist die Zahl 3 die Klasse aller Trios. Hier muß man nun fragen: Gibt diese Definition den Weg zur Verifikation an?

Wird die Aussage: »Hier stehen 3 Stühle« in der Weise verifiziert, daß die Klasse dieser Stühle mit allen andern Trios in der Welt verglichen wird? Nein! Wenn wir aber den Sinn dieser Aussage verstehen können, ohne sie auf diese Art zu verifizieren, dann muß die Aussage *allein* schon alles Wesentliche enthalten, und die Angabe der Trios kann für die Zahl 3 nicht belangvoll sein.

Wenn ich frage: »Wieviel Stühle befinden sich in diesem Zimmer?« und man mir antwortet: »Soviele wie in jenem Zimmer«, so würde ich mit Recht sagen: »Das ist keine Antwort auf meine Frage. Ich habe gefragt, wieviel Stühle hier stehen und nicht, wo sich noch ebenso viele befinden.«

Die Russellsche Definition leistet gerade das nicht, worauf es ankommt. Die Angabe der Zahl muß eine Methode enthalten, um zu dieser Zahl zu gelangen. Und gerade das läßt diese Definition vermissen.

Es ist wohl wahr, daß alle Klassen, die sich eindeutig aufeinander abbilden lassen, dieselbe Anzahl von Elementen besitzen. Aber die Angabe dieser Klassen ist nicht die Angabe der Zahl. Entweder wir fassen die Klassen intensional auf als Eigenschaften (Aussagefunktionen), dann sagt uns die Angabe der äquivalenten Klassen nicht, wieviel Glieder darunter fallen. Oder wir fassen die Klassen extensional auf als Umfänge, dann enthält die Beschreibung einer solchen Klasse bereits ein Bild der Anzahl, und es ist wieder verfehlt, die Zahl durch solche Klassen definieren zu wollen.

Die Angabe der Zahl ist die Angabe des Wieviel und nicht die Angabe der Gleichzahligkeit.

Und kann man denn im Ernst glauben, daß das Wesen der Zahl 3 angeben so viel heißt, wie die Eigenschafl:en angeben, unter welche drei Dinge fallen? Es ist zweifellos eine Welt denkbar, in der diese Eigenschaften immer von vier Dingen erfüllt wären. Ist deswegen die Zahl 3 die Zahl 4 ? Es ist klar: Nicht mit den Extensionen der tatsächlichen Eigenschaften dürfen wir es zu tun haben, sondern *mit dem, was es möglich macht, sie zu beschreiben*.

Die Klasse der Trios unterscheidet sich von der Zahl 3 ungefähr ebenso, wie sich ein Gehirnvorgang von einem Bewußtseinszustand unterscheidet.

An der Frege-Russellschen Definition ist demnach falsch, daß sie keine Methode der Verifikation angibt. Sagt man: Doch, die Verifikation besteht darin, daß wir die Menge mit einer andern Menge vergleichen, nämlich mit der Menge unserer Zahlzeichen, so ist darauf zu erwidern: Das ist keine Verifikation, und zwar aus folgendem Grund. Wenn ich sage: Ich habe eine Menge auf eine Teilreihe der Zahlzeichen abgebildet - d. h., ich habe gezählt - so meine ich damit natürlich nicht die Klasse der tatsächlichen Zahlzeichen, die auf dem Papier stehen, sondern ich meine die Zahl*symbole*. Dann ist aber die Reihe der Zahlzeichen nicht durch eine Eigenschaft definiert, sondern wir haben ein *Konstruktionsgesetz* vor uns, nach dem eine Reihe von Zeichen gebildet ist, und dieses Gesetz - nicht die tatsächlichen Eigenschaften - setzt uns in den Stand,

compreendamos o significado dos símbolos indefiníveis.

O que é explicado pela definição é o emprego de um sinal na proposição. A definição explica o *sentido* da proposição.

A definição é uma regra de transformação. Indica como uma proposição deve ser transformada em outras proposições nas quais o conceito em questão não ocorre mais.

A definição remete um conceito a um ou a mais outros, e estes por sua vez a outros etc. A direção desta remissão é determinada pelo método de verificação.

As definições que não atendem a este propósito não têm sentido.

De acordo com o princípio de abstração de Frege-Russell, o número 3 é a classe de todos os trios. Aqui, temos que perguntar agora: esta definição indica o caminho para a verificação?

O enunciado: “Há 3 cadeiras aqui” é verificado de tal forma que a classe destas cadeiras é comparada com todos os outros trios do mundo? Não! Mas se pudermos compreender o sentido deste enunciado sem verificá-lo desta forma, então o enunciado *sozinho* já tem que conter tudo o que é essencial, e a indicação dos trios não pode ser relevante para o número 3.

Se eu perguntar: “Quantas cadeiras há nesta sala?” E alguém responder: “Tantas quantas há naquela sala”, eu diria com razão: “Isto não é uma resposta à minha pergunta. Eu perguntei quantas cadeiras havia e não onde ainda havia esta quantidade.”

A definição de Russell simplesmente não faz o que importa. A especificação do número deve conter um método para chegar a este número. E é exatamente isto que falta a esta definição.

É bem verdade que todas as classes que podem ser claramente mapeadas umas com relação às as outras têm o mesmo número de elementos. Mas a especificação destas classes não é a especificação do número. Ou concebemos as classes intensionalmente como propriedades (funções proposicionais), e então a especificação das classes equivalentes não nos diz quantos membros se enquadram nelas. Ou concebemos as classes extensionalmente como escopos, e então a descrição de tal classe já contém uma imagem do número, e novamente é um erro querer definir o número em termos de tais classes.

A especificação do número é a especificação do quanto e não a especificação da equinumericidade.

E pode-se acreditar seriamente que especificar a essência do número 3 significa tanto quanto especificar as propriedades sob as quais três coisas se enquadram? Não há dúvida de que é imaginável mundo em que estas propriedades seriam sempre preenchidas por quatro coisas. É por isto que o número 3 é o número 4? Está claro: não devemos tratar das extensões das propriedades reais, mas *daquilo que torna possível descrevê-las*.

A classe de trios difere do número 3 aproximadamente da mesma maneira que um processo cerebral difere de um estado de consciência.

O que está errado com a definição de Frege-Russell é que ela não especifica nenhum método de verificação. Se se disser: mas, sim, se especifica, a verificação consiste em comparar o conjunto com um outro conjunto, nomeadamente com o conjunto dos nossos numerais, então a resposta seria: não se trata de uma verificação, pelo seguinte motivo. Quando digo: mapeei um conjunto sobre um subconjunto de numerais - isto é, eu contei - claro que não me refiro à classe de numerais reais que estão no papel, mas quero dizer os *símbolos* de número. Mas então a série de numerais não é definida por uma propriedade, senão que temos diante de nós uma *lei de construção* de acordo com a qual uma série de sinais é formada, e esta lei - e não as propriedades reais - nos permite derivar, pela especificação de *um* símbolo de numérico, todos os precedentes e reconstruir *toda* a série. (A ordem dos nossos numerais é baseada em sua sintaxe e não em suas propriedades reais.) Pois este procedimento não *significa* de forma alguma mapear um conjunto sobre um outro no sentido da definição; não significa um mapeamento *sobre* os numerais como *sinais*, senão um mapeamento *mediante* os numerais como *símbolos*, portanto aus der Angabe *eines* Zahlsymbols alle vorhergehenden abzuleiten, die *ganze* Reihe zu rekonstruieren. (Die Ordnung unserer Zahlworte beruht auf ihrer Syntax und nicht auf ihren tatsächlichen Eigenschaften.) Dann *bedeutet* dieses Verfahren aber gar kein Abbilden einer Menge auf eine andere im Sinne der Definition; es bedeutet nicht ein Abbilden *auf* die Zahlzeichen als *Zeichen*, sondern ein Abbilden *durch* die Zahlzeichen als *Symbole*, also ein *Darstellen* der Anzahl.

Ist es denn wahr, daß ein Zahlwort syntaktisch als *Eigenschaft* einer Klasse auftritt? Zweifellos sind wir im Stande, ein Zeichen von der Art

||||| Pflaumen

zu verstehen. Wenn aber dieses Zeichen genügt, um seine Bedeutung mitzuteilen, dann muß das Zeichen alles enthalten, was für die Mitteilung in Betracht kommt, und was es nicht enthält, kann für seine Bedeutung auch nicht wesentlich sein. Dieses Zeichen enthält ein Bild, aber nicht die Angabe einer *Eigenschaft* oder einer *Relation*.

Ist dieses Zeichen etwa so zu verstehen, daß es meint: Die Klasse der Pflaumen ist eineindeutig abgebildet auf die Klasse der Striche, die davor stehen? Gewiß nicht. Wenn ich sage: Die Klasse der Pflaumen ist abbildbar auf die Klasse der Striche, die sich in jenem Buch auf Seite 223 befinden, wenn ich also die Klasse der Striche durch eine Eigenschaft *beschreibe* - dann und nur dann hätte ich eine Klasse auf eine andere abgebildet. Es ist klar, daß hier die Striche nicht auftreten als eine beschriebene Klasse - als eine Klasse, *von* der die Rede ist - sondern daß sie auftreten so wie das Wort »Pflaumen«, d. h., als ein Bestandteil des Satzes.

Die Striche fungieren hier als *Symbol* und nicht als *Klasse*.

Russells Argumentation beruht also auf einer Verwechslung von Zeichen und Symbol.

Die Zahlen sind Formen. Der Ausdruck der Zahl ist ein Bild, das im Satz auftritt.

Den Satz: »Es gibt zwei Dinge von der Eigenschaft f« kann man so darstellen:

$$(\exists x, y) \,.\, fx \,.\, fy \,.\, \sim (\exists x, y, z) \,.\, fx \,.fy \,.\, fz$$

Hier tritt die Zahl 2 als ein abbildender Zug der Symbolik auf.

Von diesem Abbildungsprinzip hat auch Russell selbst bei der Einführung bestimmter Zahlen Gebrauch machen müssen. Um die Zahl 2 einzuführen, muß er einen Symbolismus verwenden, der selbst die Multiplizität besitzt, die er definieren soll. Dann ist aber diese Multiplizität das Entscheidende und nicht die Definition.

Die Definition *definiert* etwas, und sie *zeigt* etwas. Der Zahl entspricht dasjenige, was die Definition zeigt.

Kann man eine Form definieren? Kann man z. B. die SubjektPrädikat Form definieren als die Klasse aller Subjekt-Prädikat Sätze? In einer solchen Definition würde ja selbst die Subjekt-Prädikat Form vorkommen müssen: um die Definition zu verstehen, müssen wir also schon wissen, was die Subjekt-Prädikat Form ist. Es ist klar, daß wir es hier nicht mit den tatsächlichen Sätzen zu tun haben, sondern mit dem, was es möglich macht, Sätze zu bilden.

Wenn eine Form definierbar wäre, so könnten wir sie ohne Definition nicht verstehen. Die Möglichkeit einen Sinn auszudrücken, beruht aber gerade darauf, daß wir eine Form verstehen, ohne daß sie uns erklärt wird. Der Satz zeigt seine Form. Es ist unsinnig, *das* definieren zu wollen, worauf die Möglichkeit aller Mitteilung und Verständigung beruht.

Der Fehler bei dieser Auffassung beruht darauf, daß die Form als eine *Eigenschaft* aufgefaßt wird. Man meint, daß die Subjekt-Prädikat Form eine allgemeine Eigenschaft ist, die alle Subjekt-Prädikat Sätze haben.

Die Eigenschaft fx ist eine Verallgemeinerung der Eigenschaft fx . gx. Das Verallgemeinern führt von einer Eigenschaft zu einer anderen.

Der Ausdruck der Form ergibt sich, wenn man die konstanten Teile des Satzes in variable verwandelt. Dieses Umwandeln in Variable ist etwas ganz anderes als das Verallgemeinern.

uma *apresentação* do número.

É verdade, então, que um numeral ocorre sintaticamente como uma *propriedade* de uma classe? Sem dúvida, somos capazes de compreender um sinal do tipo

||||| ameixas

Mas se este sinal é suficiente para transmitir seu significado, então o sinal deve conter tudo o que se leva em consideração para a comunicação, e o que ele não contém não pode ser essencial para o seu significado. Este sinal contém uma imagem, mas não especifica uma *propriedade* ou *relação*.

Deve este sinal ser entendido de forma que queira dizer: a classe das ameixas está mapeada em relação um-a-um com classe de traços que está na frente dela? Certamente não. Se eu dissesse: a classe de ameixas pode ser mapeada com a classe de traços que está naquele livro na página 223 se eu descrever a classe de traços por uma *propriedade* - então, e somente então, eu teria mapeado uma classe sobre a outra. É claro que os traços não aparecem aqui como uma classe descrita - como uma classe *da* qual estamos falando - mas que aparecem como a palavra “ameixas”, ou seja, como parte da proposição.

Os traços funcionam aqui como *símbolo* e não como *classe*.

O argumento de Russell repousa portanto numa confusão entre sinais e símbolos.

Os números são formas. A expressão do número é uma imagem que ocorre na proposição.

A proposição: “Existem duas coisas com a propriedade f” pode ser apresentada da seguinte forma:

$$(\exists x, y) \,.\, fx \,.\, fy \,.\, \sim (\exists x, y, z) \,.\, fx \,.fy \,.\, fz$$

Aqui, o número 2 ocorre como um traço pictórico do simbolismo.

O próprio Russell também teve que fazer uso deste princípio de mapeamento ao introduzir certos números. Para introduzir o número 2, ele teve que empregar um simbolismo que possui a própria multiplicidade que pretende definir. Mas então esta multiplicidade é o fator decisivo e não a definição.

A definição *define* algo e *mostra* algo. O número corresponde ao que mostra a definição.

Pode-se definir uma forma? Pode-se, por exemplo, definir a forma sujeito-predicado como a classe de todas as proposições de sujeito-predicado? Nesta definição, a própria forma sujeito-predicado teria que ocorrer: para compreender a definição, já teríamos que saber o que é a forma sujeito-predicado. É claro que não estamos lidando aqui com as proposições propriamente ditas, mas com o que torna possível formar proposições.

Se uma forma fosse definível, não poderíamos compreendê-la sem definição. A possibilidade de expressar um sentido, porém, se baseia justamente no fato de compreendermos uma forma sem que ela nos seja explicada. A proposição mostra sua forma. É um contrassenso querer definir em *que* se baseia a possibilidade de toda comunicação e compreensão.

O erro desta concepção repousa no fato de que a forma é concebida como uma *propriedade*. A forma sujeito-predicado é considerada como uma propriedade geral que todas as proposições sujeito-predicado têm.

A propriedade fx é uma generalização da propriedade fx. gx. Generalizar leva de uma propriedade para outra.

A expressão da forma resulta quando as partes constantes da proposição são transformadas em partes variáveis. Esta conversão para variáveis é totalmente diferente de generalizar.

Toda a lógica de Frege-Russell é baseada na confusão entre conceito e forma. Números não são conceitos. Não se chega a eles por generalização.

Frege e Russell procuraram a essência do número na direção errada. Eles acreditavam que o número 3 era o resultado de algum tipo de generalização de 3 cadeiras, 3 ameixas e assim por

Der ganzen Frege-Russellschen Logik liegt die Verwechslung von Begriff und Form zugrunde. Die Zahlen sind nicht Begriffe. Man kommt zu ihnen nicht durch Verallgemeinerung.

Frege und Russell haben das Wesen der Zahl in einer falschen Richtung gesucht. Sie haben geglaubt, daß die Zahl 3 das Resultat einer Art Verallgemeinerung von 3 Stühlen, 3 Pflaumen u. s. w. ist. Und so haben sie, um das Eigentümliche dieser Verallgemeinerung auszudrücken, das Abstraktionsprinzip erfunden.

Die Zahl 3 ist nicht das Allgemeine an den Trios.

Die Zahl 3 entsteht ebensowenig durch Verallgemeinerung aus den einzelnen Trios, wie die Form eines Bildes durch Verallgemeinerung aus den einzelnen Bildern entsteht.

Die Zahl 3 ist die gemeinsame Form der Trios, aber nicht ihre gemeinsame Eigenschaft.

Die Form 3 kann man nur übertragen, aber nicht definieren.

Formen haben nichts mit Allgemeinheit zu tun. Eine Form ist weder allgemein noch speziell.

Die Sätze der Arithmetik sind nicht die *allgemeinen* Gesetze, die auf konkrete Fälle angewendet werden. Wenn ich sage: »2 Pflaumen + 2 Pflaumen sind 4 Pflaumen« und »2 Stühle + 2 Stühle sind 4 Stühle« so habe ich nicht den Satz 2 + 2 = 4 auf verschiedene Fälle angewendet, sondern ich habe immer *dieselbe* Anwendung vor mir.

Das Mathematische ist überall dasselbe. Für die Mathematik gibt es kein »Anwendungsproblem« .

Das hängt damit zusammen, daß eine Form nicht unter eine andere fallen kann (Über- und Unterordnung gibt es nur bei Begriffen.) *Die Methode der Darstellung der Zahlen ist die Methode der Abbildung*. Die Zahl zeigt sich im Symbol.

Wenn ich von 5 Menschen spreche, so kann ich die Menschen durch Striche vertreten. Aber die Fünfzahl der Menschen wird nicht vertreten, sondern stellt sich in der Fünfzahl der Striche dar. Hier fassen wir das Zahlzeichen unmittelbar als ein Bild auf.

Die übliche Art der Darstellung der Zahlen mit Hilfe des Ziffernsystems beruht auf genau demselben Prinzip. Auf den ersten Blick scheint die Zahl 387 kein Bild der Anzahl zu sein, die sie bedeutet. Wir müssen aber beachten, daß zu den Zeichen noch die Regeln der Syntax hinzukommen. Die Zeichen 3, 8, 7, sind definiert. Gehen wir auf die Definition zurück, d. h., lösen wir diese Zeichen schrittweise auf, so nehmen sie gerade *die* Multiplizität an, die sie bedeuten; z. B. 3 = 1 + 1 + 1. Zweitens bildet auch die Stellung der Ziffern etwas ab. Unsere Zahlzeichen enthalten die Möglichkeit der Umwandlung in andere Zeichen, welche unmittelbare Bilder sind. D. h. unsere Zahlzeichen, zusammen mit den Regeln der Syntax, sind Anweisungen zur Konstruktion eines bildhaften Symbols.

Durch alle arithmetischen Symbole, Abkürzungen, Operationszeichen etc. hindurch muß immer der Rückweg zur bildhaften Darstellung der Zahlen offen bleiben. Die Symbolik der Zahl darstellung ist ein System von Regeln zur Übersetzung ins Bildhafte.

Eine Zahl definieren kann zweierlei bedeuten. Meint man, die Zahl 3 definieren heißt etwa, eine Klasse von Klassen angeben, so ist zu sagen: In diesem Sinn ist 3 nicht definierbar. Meint man aber mit Definieren die *arithmetische* Definition: 3 = 2 + 1, 2 = 1 + 1, so läßt sich 3 natürlich definieren. (Die Worte »symbolisieren«, »definieren« haben eine ganz verschiedene Bedeutung, je nachdem ob sie im Zusammenhang mit Begriffen oder Formen gebraucht werden.)

Ein Zahlwort symbolisiert in ganz anderer Weise als ein Begriff.

Die Definition eines Begriffes weist den Weg zur *Verifikation*, die Definition eines Zahlwortes (einer Form) den Weg zur *Konstruktion*.

Darauf beruht es ja auch, daß wir die Bedeutung eines beliebig hingeschriebenen Zahlzeichens verstehen, ohne daß es uns erklärt wird.

Kann es eine arithmetische Notation geben, die jede Zahl mit einem Eigennamen bezeich-

diante. E assim, para expressar a peculiaridade desta generalização, eles inventaram o princípio da abstração.

O número 3 não é o universal dos trios.

O número 3 é tão pouco criado pela generalização dos trios individuais quanto a forma de uma imagem é criada pela generalização das imagens individuais.

O número 3 é a forma comum dos trios, mas não a sua propriedade comum.

A forma 3 só pode ser transferida, mas não definida.

As formas não têm nada a ver com a generalidade. Uma forma não é geral nem específica.

As proposições da aritmética não são leis *gerais* aplicadas a casos concretos. Quando digo: “2 ameixas + 2 ameixas são 4 ameixas” e “2 cadeiras + 2 cadeiras são 4 cadeiras” não apliquei a proposição 2 + 2 = 4 a casos diferentes, mas sempre tenho a mesma aplicação diante de mim .

A matemática é a mesma em todos os lugares. Não há “problema de aplicação” para a matemática.

Isto tem a ver com o fato de que uma forma não pode se enquadrar em outra (só há ordem superordenada e subordinada para os conceitos). *O método de apresentação dos números é o método de afiguração*. O número se mostra no símbolo.

Se falo de 5 pessoas, posso representá-las com traços. Mas o número cinco de pessoas não é representado, senão que se apresentado pelo número cinco de traços. Aqui concebemos o numeral imediatamente como uma imagem.

A maneira usual de apresentar os números com a ajuda do sistema numérico é baseada exatamente no mesmo princípio. À primeira vista, o número 387 não parece uma imagem do número que significa. Mas temos que notar que as regras de sintaxe são adicionadas aos sinais. Os sinais 3, 8, 7 são definidos. Se voltarmos à definição, ou seja, se resolvermos estes sinais passo a passo, eles assumem *a* própria multiplicidade que significam; por exemplo, 3 = 1 + 1 + 1. Em segundo lugar, a posição dos dígitos também afigura alguma coisa. “Nossos numerais contêm a possibilidade de conversão em outros sinais que são imagens imediatas. Isto é, nossos numerais, junto com as regras da sintaxe, são instruções para construir um símbolo pictórico.

Através de todos os símbolos aritméticos, abreviaturas, símbolos operacionais etc., o caminho de volta à apresentação pictórica dos números tem que estar sempre aberto. O simbolismo da apresentação de números é um sistema de regras para tradução no pictórico.

Definir um número pode significar duas coisas. Se se pensa que definir o número 3 significa, por exemplo, especificar uma classe de classes, deve-se dizer: neste sentido, 3 não pode ser definido. Mas se queremos dizer com “definir” a definição *aritmética*: 3 = 2 + 1, 2 = 1 + 1, então 3 pode certamente ser definido. (As palavras “simbolizar” e “definir” têm significados completamente diferentes, dependendo se são usadas no contexto dos conceitos ou das formas.)

Um numeral simboliza de uma maneira completamente diferente de um conceito.

A definição de um conceito mostra o caminho para a *verificação*, a definição de um numeral (uma forma), o caminho para a *construção*.

É também com base nisto que compreendemos o significado de um numeral escrito aleatoriamente sem que ele nos seja explicado.

Pode haver uma notação aritmética que denota todos os números com um nome próprio? Não. A aritmética introduz um número limitado de nomes próprios (cifras) e expressa todos os outros números por meio da multiplicidade da apresentação. Sempre que devemos apresentar um número ilimitado de possibilidades com um número limitado de meios, o procedimento de apresentação baseia-se no fato de empregar os nossos sinais como imagens.

O infinito não é uma imagem.

“Infinito” não é uma instrução para a construção de uma imagem. Portanto, o infinito não é net? Nein. Die Arithmetik führt eine begrenzte Zahl von Eigennamen (Ziffern) ein und drückt alle andern Zahlen durch die Multiplizität der Darstellung aus. Wo immer wir eine unbegrenzte Zahl von Möglichkeiten mit einer begrenzten Zahl von Mitteln darzustellen haben, beruht das Verfahren der Darstellung darauf, daß wir unsere Zeichen als Bilder verwenden.

Das Unendliche ist kein Bild.

»Unendlich« ist keine Anweisung zur Konstruktion eines Bildes. Das Unendliche ist also keine Zahl.

Wenn man sagt: Andere Wesen könnten das Unendliche darstellen, so ist darauf zu erwidern: Können wir denn ein solches Wesen beschreiben? Und da zeigt sich, daß eine solche Annahme gar nichts leistet.

Der Unterschied zwischen endlich und unendlich ist ein logischer Unterschied. Mit der empirischen Beschaffenheit unseres Bewußtseins hat er nichts zu tun.

Wir können aus unserer logischen Welt nicht hinaustreten, um sie von außen zu betrachten.[3]

SINN UND BEDEUTUNG[4]

Der Sinn eines Satzes ist die Methode seiner Verifikation. Diese ist nicht das Mittel, um die Wahrheit eines Satzes festzustellen, sondern der Sinn selbst. Diese muß man kennen, um den Satz zu verstehen. Diese angeben heißt, den Satzsinn angeben. Nach einer Methode der Verifikation kann man nicht suchen. Nur das, was durch sie festgestellt wird, kann der Satz sagen.

Eine Frage ist eine Aufforderung zu suchen. Am Ende der Denkbewegung kommt die Antwort. Die Richtung der Denkbewegung wird durch den logischen Ort der Antwort bestimmt. Fragen sind verschieden, wenn ihre Antworten verschieden sind. Eine Frage verstehen heißt, die Art des Satzes als Antwort wissen. Ohne Antwort keine Denkrichtung, keine Frage. Man kann nicht richtungslos suchen.

Das Wort, der Ausdruck, das Symbol hat Bedeutung nur im Zusammenhang des Satzes. Um die Bedeutung eines Wortes sich zu vergegenwärtigen, muß man auf den Sinn der Sätze, in denen es vorkommt, auf die Art der Verifikation, achten.

---

3. Die Auffassung, dass wir unsere logische Welt nicht verlassen und beispielsweise fragen können, ob andere Wesen das Unendliche darstellen können, kennzeichnet schon 1929 Wittgensteins philosophische Vision. Obwohl die Logik eine Praxis definierte, konnte Wittgenstein eine Praxis ohne die Logik nicht visualisieren. Daher war dies das Instrument, das in dieser Zeit verwendet wurde, um philosophische Verwirrungen aufzuklären und aufzulösen. Aber ab 1930 begann Wittgenstein jedoch mit zunehmender Tiefe, die Idee des Grammatikalischen als Normativen und damit die Verwechslungen zwischen Bildern, zwischen unzulänglichen Ausdrucksformen oder Analogien in einer bestimmten Praxis und ihren jeweiligen Grammatiken. Was in Bezug auf Verwechslungen getan wird, ist innerhalb dieser Praxis durch die Rückkehr zum normalen Gebrauch von Wörtern in der gewöhnlichen Sprache aufzulösen. So zum Beispiel in der MS 110, S. 291, in 1931, löste Wittgenstein durch den Vergleich mit der grammatikalischen Norm eine Verwechslung in der Ausdrucksform eines Maßsatzes:. "Man erkennt scheinbar in dem unsinnigen Satz etwas, wie eine Tautologie, zum Unterschied von einer Kontradiktion. Aber das ist ja auch falsch. – Man sagt gleichsam: 'Ja, er ist ausgedehnt, aber wie könnte es denn anders sein? also, wozu es sagen!' / Es ist dieselbe Tendenz, die uns auf den Satz 'dieser Stab hat eine bestimmte Länge' nicht antworten läßt 'Unsinn!', sondern 'Freilich!'. / Was ist aber der Grund (zu) dieser Tendenz? Sie könnte auch so beschrieben werden: wenn wir die beiden Sätze 'dieser Stab hat eine Länge' und seine Verneinung 'dieser Stab hat keine Länge' hören, so sind wir parteiisch und neigen dem ersten Satz zu (statt beide für Unsinn zu erklären). / Der Grund hiervon ist aber eine Verwechslung: Wir sehen den ersten Satz verifiziert (und den zweiten falsifiziert) dadurch, 'daß der Stab 4m hat'. Und man wird sagen: 'und 4m ist doch eine Länge' und vergißt, daß man hier einen Satz der Grammatik hat." (Auszug auch nach *Big Typescript* verschoben: TS 213, S. 96.) (A. U.)

4. Dieser Abschnitt stammt aus den Notizen von Herrn Stein. (F. H.)

um número.

Se alguém disser: outros seres podem representar o infinito, a resposta deve ser: podemos descrever tal ser? E isto mostra que tal suposição não serve para absolutamente nada.

A diferença entre finito e infinito é uma diferença lógica. Não tem nada a ver com a natureza empírica da nossa consciência.

Não podemos sair de nosso mundo lógico para observá-lo de fora.[3]

SENTIDO E SIGNIFICADO[4]

O sentido de uma proposição é o método de sua verificação. Este não é o meio de estabelecer a verdade de uma proposição, mas o próprio sentido. Este tem que ser conhecido para compreender a proposição. Especificá-lo significa especificar o sentido da proposição. Não se pode procurar um método de verificação. A proposição pode apenas dizer o que é estabelecido por ela.

Uma pergunta é um convite a buscar por alguma coisa. No final do movimento do pensamento vem a resposta. A orientação do movimento do pensamento é determinada pelo lugar lógico da resposta. As perguntas são diferentes quando suas respostas são diferentes. Compreender uma pergunta significa saber o tipo de proposição como resposta. Sem resposta, não há nenhuma orientação de pensamento, não há pergunta. Não se pode procurar sem orientação.

A palavra, a expressão, o símbolo tem significado apenas no contexto da proposição. Para presentificar o significado de uma palavra tem que se estimar o sentido das proposições em que ela ocorre, o tipo de verificação.

---

3. A concepção de que não podemos dar um passo para fora do nosso mundo lógico e perguntar, por exemplo, se outros seres podem representar o infinito, marca bem a visão filosófica de Wittgenstein ainda em 1929. Ainda que o lógico definisse uma práxis, Wittgenstein não conseguia visualizar uma práxis sem o lógico. Portanto, este era o instrumento usado para esclarecer e dissolver confusões filosóficas naquele período. Mas, a partir de 1930, Wittgenstein passa a empregar, com cada vez maior profundidade, a ideia do gramatical como o normativo e, por conseguinte, as confusões entre imagens, entre formas de expressão ou analogias inadequadas, numa determinada prática, e as respectivas gramáticas. O que se realiza em termos de confusões a serem dissolvidas no interior daquela prática pelo retorno ao uso normal das palavras na linguagem ordinária. Assim, por exemplo, no MS 110, p. 291, em 1931, Wittgenstein vai resolver pela comparação com a norma gramatical uma confusão na forma de expressão de uma proposição de medida: "Aparentemente se reconhece alguma coisa, como uma tautologia à diferença de uma contradição, na proposição desprovida de sentido, mas isto também está errado. Diz-se, de certo modo: 'Sim, isto tem uma extensão, mas como poderia ser diferente? E, então, para que dizê-lo' / É a mesma tendência que não nos deixa responder à sentença 'Esta barra tem um determinado comprimento', com um 'Que absurdo!', senão com um 'É claro!' / Mas qual é a razão para esta tendência? Ela também poderia ser descrita assim: se nós ouvimas duas sentenças, 'Esta barra tem um comprimento', e sua negação 'Esta barra não tem um comprimento', então ficamos parciais e tendemos para a primeira sentença (em vez de explicar que as duas são contrassensos) / A razão aqui para isto, no entanto, é uma confusão: vemos a primeira sentença como verificada (e a segunda como falsificada), pelo fato de 'que a barra tem 4m'. E então se dirá: 'E 4m é um comprimento', esquecendo-se de que aqui temos uma proposição da gramática." (O excerto também passou para o *Big Typescript*: TS 213, p. 96.) (N. T.)

4. Esta seção provém das notas do Sr. Stein. (N. E.)

ÜBER DAS UNENDLICHE

Eine allgemeine Aussage, die durch vollständige Induktion verifiziert wird, muß in ganz anderem Sinn allgemein sein, als eine solche, die durch Einzelfälle verifiziert wird. Die Allgemeinheit muß in beiden Fällen etwas Verschiedenes bedeuten und dementsprechend der Ausdruck »*Klasse*«.

Der Ausdruck »Klasse« hat soviel verschiedene Bedeutungen, als es Methoden der Verifikation gibt.

Wollte man sagen: »Es gibt unendlich viele Stühle«, so wie man sagen kann: »Es gibt unendlich viele Primzahlen«, so wäre diese Aussage nicht falsch, sondern sinnlos. Denn diese Aussage läßt sich auf keine Weise verifizieren. Das zeigt, daß die beiden Klassenbegriffe ganz verschiedenen Regeln der Syntax folgen, also ganz verschiedene Begriffe sind.

Die Auffassung, die der heutigen irreführenden Ausdrucksweise der Mengenlehre zugrunde liegt, ist die, daß man die Bedeutung einer Klasse verstehen kann, ohne zu wissen, ob die Klasse endlich oder unendlich ist, daß man dies vielmehr erst nachträglich feststellt. Wieviel Stühle in diesem Zimmer stehen, ist eine zufällige Bestimmung zum Begriff »Stuhl in diesem Zimmer«. Wir können diese Anzahl nicht vorhersehen. »Endlich« und »unendlich« bedeuten dagegen keine zufälligen Bestimmungen zum Begriff der Klasse. Wir können dieselbe Klasse nicht einmal endlich, das andere Mal unendlich denken. In Wahrheit bedeutet, das Wort »Klasse« in beiden Fällen etwas völlig Verschiedenes. Es ist gar nicht ein und derselbe Begriff, der durch den Zusatz »endlich« oder »unendlich« näher bestimmt wird.

Russell leistete diesem Irrtum noch dadurch Vorschub, daß er eine Symbolik geschaffen hat, die beide Arten von Klassen in genau derselben Weise darstellt. So wurde er vollends verhindert, die wahre Bedeutung dieses Unterschiedes zu erkennen.

Eine richtige Symbolik muß eine unendliche Klasse ganz anders wiedergeben als eine endliche. Endlichkeit und Unendlichkeit muß schon aus der Syntax der Klasse zu ersehen sein. In einer richtigen Sprache darf man nicht einmal in die Ve rsuchung kommen, die Frage aufzuwerfen, ob eine Klasse endlich oder unendlich ist.

»Unendlich« ist keine Anzahl. Das Wort »unendlich« hat eine andere Syntax als ein Zahlwort.

Das Unendliche tritt in der Sprache immer in derselben Weise auf, nämlich als eine nähere Bestimmung zum Begriff *möglich*. Wir sagen z. B., eine Strecke ist unendlich teilbar, ein Körper kann sich unendlich weit entfernen u. s. w. Hier ist von einer Möglichkeit die Rede und nicht von einer Wirklichkeit. Das Wort »unendlich« bestimmt diese Möglichkeit.

Was bedeutet die Aussage: Eine Strecke ist unendlich teilbar? Dieser Satz handelt von der Möglichkeit des Teilens. Wenn ich sage: Diese Strecke *ist* in zwei Teile teilbar, so heißt das: Die Aussage, die Strecke ist in zwei Teile geteilt, hat Sinn, ob sie nun wahr oder falsch ist. Hier kann statt des Zahlwortes »zwei« jedes beliebige Zahlwort gesetzt werden. Wir können also eine Reihe von Aussagen bilden, die sagen: die Strecke ist in zwei Teile geteilt, die Strecke ist in drei Teile geteilt u. s. w. Die Reihe ist nach einem formalen Gesetz geordnet. Wir können dieses formale Gesetz dadurch hervorheben, daß wir die Operation angeben, die aus einer Satzform die nächstfolgende erzeugt. Was wir a priori wissen, ist die Ausführbarkeit dieser Operation; d. h., wir wissen, daß auch der neugebildete Satz Sinn hat. Und dies wissen wir auf Grund des logischen Baues dieser Aussage.

Es ist klar, daß diese Satzformen keine empirische Gesamtheit bilden, sondern ein *System*. Dieses System ist gegeben durch das erste Glied und durch die Operation.

SOBRE O INFINITO

Um enunciado geral verificado por indução completa tem que ser geral em um sentido completamente diferente daquele verificado por casos individuais. A generalidade tem que significar algo diferente em ambos os casos e, consequentemente, a expressão "*classe*".

O expressão "classe" tem tantos significados diferentes quanto métodos de verificação.

Se alguém quisesse dizer: "Há um número infinito de cadeiras", assim como se pode dizer: "Há um número infinito de números primos", então este enunciado não seria falso, seria sem sentido. Pois este enunciado não pode ser verificado de forma alguma. Isto mostra que os dois conceitos de classe seguem regras de sintaxe completamente diferentes, ou seja, são conceitos completamente diferentes.

A concepção em que se baseia a linguagem enganosa da teoria dos conjuntos de hoje é que se pode compreender o significado de uma classe sem saber se a classe é finita ou infinita, o que só se estabele depois. Quantas cadeiras há nesta sala é uma determinação acidental para o conceito "cadeira nesta sala". Não podemos prever este número. "Finito" e "infinito", por outro lado, não significam quaisquer determinações acidentais para o conceito de classe. Não podemos pensar na mesma classe uma vez de maneira finita, e outra vez de maneira infinita. Na verdade, a palavra "classe" significa algo completamente diferente nos dois casos. Não é o sempre o mesmo conceito que é definido mais precisamente pela adição de "finito" ou "infinito".

Russell ajudou nesse erro criando um simbolismo que representa os dois tipos de classes exatamente da mesma maneira. Assim, ele foi completamente impedido de perceber o real significado desta diferença.

O simbolismo correto tem que representar uma classe infinita de maneira bem diferente de uma classe finita. A finitude e o infinito já têm que ser vistos na sintaxe da classe. Em uma linguagem correta não se deve nem mesmo ser tentado a questionar se uma classe é finita ou infinita.

"Infinito" não é um número. A palavra "infinito" tem uma sintaxe diferente daquela do numeral.

O infinito sempre ocorre da mesma forma na linguagem, a saber, como uma definição mais próxima do conceito de *possível*. Dizemos, por exemplo, um segmento pode ser dividido infinitamente, um corpo pode se afastar infinitamente, e assim por diante. Aqui estamos falando de uma possibilidade e não de uma realidade. A palavra "infinito" determina esta possibilidade.

O que significa enunciado: um segmento é infinitamente divisível? Esta proposição trata da possibilidade de divisão. Quando digo: este segmento *é* divisível em duas partes, isto significa: faz sentido a afirmação de que o segmento está dividido em duas partes, seja ela verdadeira ou falsa. Qualquer número pode ser usado aqui em vez do número »dois«. Portanto, podemos formar uma série de afirmações que dizem: o segmento foi dividido em duas partes, o segmento foi dividido em três partes etc. A série é ordenada de acordo com uma lei formal. Podemos enfatizar esta lei formal especificando a operação que produz o próximo a partir de uma forma proposicional. O que sabemos a priori é a viabilidade desta operação; isto é, sabemos que a proposição recém-formada também tem sentido. E sabemos disto por causa da estrutura lógica deste enunciado.

É claro que estas formas proposicionais não constituem uma totalidade empírica, mas um *sistema*. Este sistema é dado pelo termo inicial e pela operação.

Se dissermos agora: "O segmento é infinitamente divisível" - isto significa que o enunciado:

Wenn wir nun sagen : »Die Strecke ist unendlich teilbar« - bedeutet dies, daß die Aussage: »Die Strecke *ist* in unendlich viele Teile geteilt.« Sinn hat? Nein, denn diesen Satz gibt es nicht. Erstens ist er nicht verifizierbar. Zweitens kann er - in einem richtigen Zeichensystem - gar nicht hingeschrieben werden. (Das wird sich später erweisen.)

Der Möglichkeit, die Teilung immer weiter fortzusetzen, entspricht die Möglichkeit, in der Reihe der entsprechenden Satzformen immer weiter zu schreiten. Wenn wir nun sagen : »Die Möglichkeit des Teilens ist eine unendliche« so bedeutet dies: »Die Möglichkeit der Bildung von Satzformen, welche diese Teilung beschreiben, ist eine unendliche«. *Unendliche Möglichkeit wird durch unendliche Möglichkeit dargestellt*.

So ist also der Begriff »unendlich« eine nähere Bestimmung zum begriff »möglich«. Unendliche Möglichkeit tritt selbst als *unendliche Möglichkeit der Sprache* auf. Sie drückt sich nicht darin aus, daß eine Aussage über das Unendliche Sinn hat, denn diese Aussage gibt es nicht. Unendliche Möglichkeit bedeutet nicht: Möglichkeit des Unendlichen. Das Wort »unendlich« charakterisiert eine Möglichkeit und nicht eine Wirklichkeit.

Die unendliche Teilbarkeit einer Strecke ist etwas rein Logisches. Es ist ja auch klar, daß *diese* Möglichkeit nicht aus der Erfahrung hervorgehen kann.

Unendliche Teilbarkeit, Stetigkeit von Raum und Zeit - alles das sind keine Hypothesen. Es sind Einsichten über eine mögliche Form der Beschreibung.

Kann uns die Erfahrung nicht lehren, daß Raum und Zeit eine diskrete Struktur besitzen? Wenn wir beim fortgesetzten Teilen eines Stabes aus physikalischen Gründen auf Grenzen stoßen, so ist das eine Erfahrungstatsache, die durch einen Satz beschrieben wird. Dann muß auch die Negation dieses Satzes Sinn haben, und das heißt: Wir müssen auch mögliche Erfahrungen über eine weitere Teilung beschreiben können. Die Molekularhypothese setzt, wenn sie Sinn hat, die Möglichkeit einer weiteren Teilung voraus. Hier sieht man, daß die unendliche Teilbarkeit des Raumes nichts Faktisches ist. Die Möglichkeit, die wir hier brauchen, ist die *logische* Möglichkeit, d. h., die Möglichkeit einer Beschreibung, und diese darf nicht von den tatsächlichen Erfahrungen abhängen.

Es ist klar, daß wir es hier nicht mit einer Hypothese zu tun haben, sondern mit dem, was das Aufstellen von Hypothesen möglich macht.

Wir können allerdings der Teilbarkeit logische Grenzen ziehen. Das würde bedeuten, daß wir die Syntax unserer Darstellung ändern. Das würde natürlich nicht heißen, daß wir gewisse Erfahrungen von vornherein ausschließen, sondern es würde heißen, daß wir darauf verzichten, die Erfahrungen mit diesem Symbolismus darzustellen.

Man kann nicht fragen: Ist die Natur stetig oder unstetig? Diese Frage hat keinen Sinn. Man kann jede Diskontinuität als scheinbar auffassen, aber auch jede Kontinuität. Das zeigt, daß es sich hier nicht um Tatsachen handelt, sondern um Festsetzungen über die Darstellung von Ta tsachen.

Es scheint, daß in manchen Fällen die Unendlichkeit in Form einer Hypothese auftreten kann. Wir können z. B. die Hypothese aufstellen, daß die Fixsterne im euklidischen Raum nach einem bestimmten Gesetz ins Unendliche verteilt sind. Spricht eine solche Hypothese von einer unendlichen Erfahrung? Das muß sich aus der Art der Verifikation dieser Hypothese ergeben. »Unendlich viele Fixsterne« haben einen Sinn nur im Zusammenhang mit einem Gesetz, nach dem wir die Erfahrung darstellen (Gravitationsgesetz). Dann aber gehören sie zu der Darstellungsart dieses Gesetzes. Das heißt: Wir können eine Reihe von Beschreibungen bilden, in welchen 1, 2, 3, 4, ... Fixsterne vor kommen und feststellen, daß diese Beschreibungen der tatsächlichen Erfahrung um so näher kommen, je mehr Fixsterne wir annehmen. Jede einzelne dieser Aussagen hat Sinn, sie kann, und zwar ohne Zuhilfenahme des Gravitationsgesetzes,

“O segmento foi dividido em um número infinito de partes” faz sentido? Não, porque esta proposição não existe. Em primeiro lugar, não é verificável. Em segundo lugar, em um sistema correto de sinais, ela não pode ser escrita de forma alguma. (Isto será comprovado mais tarde).

A possibilidade de continuar a divisão cada vez mais corresponde à possibilidade de progredir cada vez mais na série das formas proposicionais correspondentes. Se dissermos agora: “A possibilidade de divisão é infinita”, isto significa: “A possibilidade de formação de formas proposicionais que descrevem esta divisão é infinita”. *A possibilidade infinita é apresentada pela possibilidadede infinita*.

Portanto, o conceito de “infinito” é uma definição mais próxima do conceito de “possível”. A própria possibilidade infinita ocorre como a *possibilidade infinita da linguagem*. Não se expressa no fato de que um enunciado sobre o infinito tem sentido, pois este enunciado não existe. Possibilidade infinita não significa: a possibilidade do infinito. A palavra “infinito” caracteriza uma possibilidade e não uma realidade.

A divisibilidade infinita de um segmento é algo puramente lógico. Também é claro que *esta* possibilidade não pode surgir da experiência.

Divisibilidade infinita, continuidade do espaço e do tempo - nenhum destes termos são hipóteses. São intuições sobre uma forma possível de descrição.

A experiência não pode nos ensinar que o espaço e o tempo têm uma estrutura discreta? Se, por razões físicas, encontramos limites para continuar a repartir um pedaço de pau, então este é um fato da experiência que é descrito por uma proposição. Pois a negação desta proposição também tem que ter sentido, e isto significa: temos também que ser capazes de descrever experiências possíveis sobre uma continuidade da divisão. A hipótese molecular, se fizer sentido, pressupõe a possibilidade uma continuidade da divisão. Aqui pode-se ver que a divisibilidade infinita do espaço não é factual. A possibilidade de que precisamos aqui é a possibilidade *lógica*, isto é, a possibilidade de uma descrição, e isto não deve depender da experiência factual.

É claro que não estamos lidando aqui com uma hipótese, mas com o que torna possível a sua apresentação.

Podemos, no entanto, traçar limites lógicos para a divisibilidade. Isto significaria que mudamos a sintaxe da nossa apresentação. Claro que isto não significa que excluímos certas experiências desde o início, mas sim que nos absteremos de apresentar as experiências com este simbolismo.

Não se pode perguntar: a natureza é contínua ou descontínua? Esta pergunta não faz sentido. Toda descontinuidade pode ser concebida como aparente, mas também toda continuidade. Isto mostra que não estamos lidando aqui com fatos, mas com estipulações sobre a apresentação dos fatos.

Parece que em alguns casos o infinito pode ocorrer na forma de uma hipótese. Podemos, por exemplo, formular a hipótese de que as estrelas fixas no espaço euclidiano são distribuídas ao infinito de acordo com uma certa lei. Tal hipótese fala de uma experiência infinita? Isto tem que decorrer do tipo de verificação desta hipótese. “Infinitamente muitas estrelas fixas” só tem um sentido em conexão com uma lei segundo a qual apresentamos a experiência (lei da gravitação). Mas então eles pertencem à forma como esta lei é apresentada. O que significa: podemos formar uma série de descrições em que ocorrem 1, 2, 3, 4, ... estrelas fixas, e estabelecer que estas descrições se aproximam da experiência real quanto mais estrelas fixas assumimos. Cada um desses enunciados tem sentido, eles podem ser verificadas sem o auxílio da lei da gravitação. A suposição de um número infinito de estrelas fixas não pode mais ser verificada por si só, mas apenas em conexão com a lei da gravitação. Mas então a suposição de um número infinito de estrelas fixas deve ter um sentido completamente diferente do que a suposição de 100 estrelas verifiziert werden. Die Annahme von unendlich vielen Fixsternen kann nicht mehr für sich allein verifiziert werden, sondern nur im Zusammenhang mit dem Gravitationsgesetz. Dann muß aber die Annahme von unendlich vielen Fixsternen einen ganz andern *Sinn* haben als die Annahme von 100 Fixsternen, sie kann gar keine selbständige Aussage sein, sondern sie ist der Teil eines *Darstellungssystems*, mit dem wir die Wirklichkeit beschreiben.

Wenn wir bei einer Reihe von empirischen Kreisen das Verhältnis von Umfang und Durchmesser ausmessen, so erhalten wir Zahlenwerte, die mehr oder weniger nahe bei π liegen. *Die Zahl* π *ergibt sich nicht aus den tatsächlichen Messungen*. Wenn die Messungen einen andern Wert für dieses Verhältnis ergeben, so sagen wir nicht: Die Zahl π hat einen andern Wert, sondern wir sagen: Unsere Messung war ungenau. D. h., wir halten an der Zahl π fest und betrachten sie als den Maßstab, nach dem wir die Güte der Beobachtungen bemessen. Die euklidische Geometrie beruht auf einer Festsetzung. Die Zahl π stellt ein unendliches Gesetz dar, das die tatsächlichen Beobachtungen begleitet. So genau wir auch messen mögen, die Genauigkeit der Zahl π hält Schritt. Hier ist von einer unendlichen Möglichkeit die Rede und nicht von einer unendlichen Wirklichkeit.

Die Sätze der Geometrie beziehen sich auf eine unendliche Möglichkeit der Genauigkeit des Messens. Sie beschreiben nicht die tatsächlichen Messungen, sondern sie geben an, wie wir die tatsächlichen Messungen beurteilen.

Wenn wir von unendlich vielen Fixsternen sprechen, so bedeutet das: Wir geben ein unendliches Gesetz an, nach dem wir die tatsächlichen Erfahrungen beschreiben. Dieses Gesetz ist eine Festsetzung und keine Aussage. Wir setzen fest, wie wir die tatsächlichen Erfahrungen interpretieren wollen. Dieses Gesetz reicht für jede denkbare Genauigkeit des Messens hin, und darin liegt die unendliche Möglichkeit dieses Gesetzes.

»Unendlich viele Fixsterne« sind eine Festsetzung und keine Erfahrung.

Dedekinds Definition[5]

Kann man nicht nach Dedekind in Symbolen ausdrücken, daß eine Klasse endlich oder unendlich ist? Die Dedekindsche Definition sagt, daß eine Klasse unendlich ist, wenn sie auf eine echte Teilklasse eindeutig abgebildet werden kann. Diese Aussage besagt nichts, solange nicht eine Methode der Verifikation angegeben wird. Besteht die Methode der Verifikation darin, daß die Elemente der Klasse und die der Teilklasse durch Aufzählung einander zugeordnet werden, so hat *keine* Klasse diese Eigenschaft. Die Endlichkeit ist dann bereits in den Regeln enthalten, wie Aussagen über solche Klassen zu verifizieren sind, also in der Syntax der Klasse. Wird aber eine andere Methode der Verifikation zugelassen - nämlich die Induktion - so *bedeuten* bereits die Worte »alle«, »Klasse«, » Teilklasse« etwas ganz anderes und man kann wieder nicht fragen, ob die Klasse endlich oder unendlich ist.

5. Vgl. S. 47 f oben u. Anm. (F. H.)

fixas; não pode ser um enunciado independente, mas é parte de um *sistema de apresentação* com o qual descrevemos a realidade.

Se medirmos a proporção da circunferência e do diâmetro em uma série de círculos empíricos, obteremos valores numéricos que estão mais ou menos próximos de π. *O número* π *não resulta de medições factuais*. Se as medidas fornecerem um valor diferente para esta relação, não diremos: o número π tem um valor diferente, mas diremos: nossa medida foi imprecisa. Ou seja, nos restringimos ao número π e o consideramos como o padrão pelo qual medimos a qualidade das observações. A geometria euclidiana é baseada numa estipulação. O número π apresenta uma lei infinita que acompanha as observações factuais. Quanto mais precisamente medirmos, a precisão do número π continuará a manter o ritmo desta medição. Aqui estamos falando sobre uma possibilidade infinita e não de uma realidade infinita.

As proposições da geometria referem-se a uma possibilidade infinita de precisão da medição. Elas não descrevem medições factuais, mas indicam como avaliaríamos as medições reais.

Quando falamos de um número infinito de estrelas fixas, isto significa: fornecemos uma lei infinita de acordo com a qual descrevemos as experiências reais. Esta lei é uma estipulação, não um enunciado. Nós determinamos como queremos interpretar as experiências factuais. Esta lei é suficiente para toda precisão de medição concebível, e aí reside a possibilidade infinita desta lei.

"Infinitamente muitas estrelas fixas" são uma estipulação e não uma experiência.

Definição de Dedekind[5]

Não se pode, segundo Dedekind, expressar em símbolos se uma classe é finita ou infinita? A definição de Dedekind diz que uma classe é infinita se puder ser mapeada exclusivamente em uma subclasse real. Este enunciado não significa nada, a menos que um método de verificação seja especificado. Se o método de verificação consiste em atribuir os elementos da classe e os da subclasse um ao outro por meio de enumeração, *nenhuma* classe possui esta propriedade. A finitude, então, já está contida nas regras sobre como os enunciados sobre estas classes devem ser verificados, ou seja, na sintaxe da classe. Mas se outro método de verificação é permitido - nomeadamente a indução - então as palavras "todos", "classe", "subclasse" já *significam* algo completamente diferente e não se pode perguntar novamente se a classe é finita ou infinita.

5. Cf. p. 48s acima, e nota de rodapé. (N. E.)

ANHANG B

THESEN[6]

von Friedrich Waismann
(um 1930)

6. In der Fachliteratur zu Wittgenstein findet sich häufig die Vorstellung, dass der Autor am 20.11.1931 in einem Brief an Schlick auf die Veröffentlichung seiner neuen posttraktarischen Ideen in Form von „Thesen" verzichtet hätte, wegen des angeblich dogmatischen Darstellungsstils von Waismann (vgl. Baker 2003, S. xxvi; Stern 2009, S. 66). Juha Manninen (2011, S. 245) stellt diese Fragen jedoch viel transparenter, indem er nicht nur klarstellt, dass Wittgenstein mehr von sich selbst als von Waismann redet, sondern dass Waismann dieser Ansicht voll zustimmt, und die von Wittgenstein vorgeschlagene antidogmatische Modifikation. Ich gebe hier einen Teil dieser Korrespondenz wieder, sowie Material, in dem Waismann bereits 1932 Wittgensteins Antidogmatismus bestätigt, beide Auszüge zitiert von Manninen:

// [...] auch ich kann mein Versprechen – wenn es ein's war – Ihnen lieber H. Professor einen vernünftigen, oder verständlichen, Auszug aus meinen Manuskripten zu schicken, nicht halten. Nebenbei: alles oder doch das meiste was „Elementarsätze" oder „Gegenstände" betrifft hat sich nun als bestätigt, & ständig umgearbeitet werden. [...]
Nur eine Bemerkung ich möchte machen, obwohl ich nicht, ob sie Ihnen helfen kann: vielleicht den Hauptunterschied zwischen der Auffassung des Buches [Tractatus] & meiner jetzigen ist, dass ich liedensah, desffinse, desßffinse, desffinse, sondern im Tabulieren, in der übersichtlichen Darstellung, der Grammatik, dh des grammatischen Gebrauchs, der Wörter. Damit fällt alles Dogmatische, was ich über „Gegenstand", „Elementarsatz" etc. gesagt habe. Will man z.B. das Wort „Gegenstand" verstehen, so sehe man nach wie es tatsächlich gebraucht wird. //
(Wittgenstein an Schlick, 20. November 1931)

// Man sieht also, dass Fragen, die auf „Beunruhigung" beruhen, nicht sachlich, d.h. durch Eingehen auf ihren Inhalt und Partei-Ergreifen zu lösen sind, sondern dass es vielmehr nötig ist, sie durch methodische Kritik zu entwirren. Es gehört also gar nicht in den Stil unserer Auffassung, etwas zu behaupten, d.h. irgendwelche Thesen aufzustellen. //
(Waismann, in Material von 1932 von Manninen gefunden (op. cit.)). (A. U.)

ANEXO B

TESES[6]

por Friedrich Waismann
(cerca de 1930)

6. É comum encontrar-se na literatura especializada em Wittgenstein a ideia de que em 20/11/1931, numa carta enviada a Schlick, o autor teria desistido da publicação das suas novas ideias pós-tractarianas em forma de "teses", por causa do suposto estilo dogmático de apresentação preparado por Waismann (cf. Baker, 2003, p. xxvi; Stern, 2009, p. 66). Juha Manninen (2011, p. 245), no entanto, coloca estas questões de forma bem mais transparente, ao esclarecer não só que Wittgenstein estava falando mais sobre si mesmo do que sobre Waismann, como também Waismann estava plenamente de acordo com esta visão. Assim, Waismann incorporou muito rapidamente a modificação antidogmática proposta por Wittgenstein. Reproduzo aqui parte desta correspondência, como também um material em que Waismann corrobora o antidogmatismo de Wittgenstein já em 1932, ambos excertos citados por Manninen:

// [...] auch ich kann mein Versprechen – wenn es ein's war – Ihnen lieber H. Professor einen vernünftigen, oder verständlichen, Auszug aus meinen Manuskripten zu schicken, nicht halten. Nebenbei: alles oder doch das meiste was „Elementarsätze" oder „Gegenstände" betrifft hat sich nun als fehlerhaft erwiesen, & mußte gänzlich umgearbeitet werden. [...]
Nur eine Bemerkung möchte ich machen, obwohl ich nicht weiß, ob sie Ihnen helfen kann: vielleicht den Hauptunterschied zwischen der Auffassung des Buches [Tractatus] & meiner jetzigen ist, daß ich einsah, daß die Analyse des Satzes nicht im Auffinden verborgener Dinge liegt, sondern im Tabulieren, in der übersichtlichen Darstellung, der Grammatik, d.h. des grammatischen Gebrauchs, der Wörter. Damit fällt alles Dogmatische, was ich über „Gegenstand", „Elementarsatz" etc. gesagt habe. Will man z.B. das Wort „Gegenstand" verstehen, so sehe man nach wie es tatsächlich gebraucht wird. //

// [...] eu também não posso cumprir minha promessa - se assim for - de enviar-lhe, caro Sr. Professor, um trecho razoável ou compreensível de meus manuscritos. A propósito: tudo ou pelo menos a maior parte do que diz respeito a "proposições elementares" ou "objetos" acabou por ser defeituoso e teve que ser completamente retrabalhado. [...]
Só gostaria de fazer uma observação, embora não saiba se isto pode ajudá-lo: talvez a principal diferença entre a concepção do livro [Tractatus] e a minha atual é que percebi que a análise da proposição não está em encontrar coisas escondidas, mas em tabular, numa apresentação panorâmica, a gramática, ou seja, o uso gramatical das palavras. Com isto, cai tudo o que disse dogmaticamente sobre "objeto", "proposição elementar" etc.. Se alguém quiser compreender a palavra "objeto", por exemplo, então deve ver como ela é realmente usada.//
(Wittgenstein a Schlick, em 20 de novembro de 1931)

// Man sieht also, dass Fragen, die auf „Beunruhigung" beruhen, nicht sachlich, d.h. durch Eingehen auf ihren Inhalt und Partei-Ergreifen zu lösen sind, sondern dass es vielmehr nötig ist, sie durch methodische Kritik zu entwirren. Es gehört also gar nicht in den Stil unserer Auffassung, etwas zu behaupten, d.h. irgendwelche Thesen aufzustellen. //

// Assim, pode-se ver que as questões que se baseiam na "inquietação" não podem ser resolvidas de forma objetiva, ou seja, entrando em seu conteúdo e tomando partido, mas sim que é necessário desembaraçá-las por meio de uma crítica metódica. Portanto, não pertence ao estilo de nossa concepção afirmar algo, ou seja, apresentar quaisquer teses. //
(Waismann, num material de 1932 recuperado por Manninen (op. cit.)). (N. T.)

Die folgenden Sätze haben nur den Wert von Erläuterungen. Die folgenden Erklärungen haben nur den Wert von Umschreibungen. Der Zweck dieser Erläuterungen und Umschreibungen ist die logische Klärung unserer Gedanken. Ihr Ergebnis sind nicht Sätze, sondern das richtige Verstehen von Sätzen.

1. *Sachverhalt, Tatsache, Wirklichkeit*

Ein *Sachverhalt* ist alles das, was bestehen oder nicht bestehen kann.

Das Bestehen und das Nichtbestehen eines Sachverhaltes heißt *Tatsache*.

Die Wirklichkeit ist das Bestehen und Nichtbestehen von Sachverhalten. (Auch das Nichtbestehen eines Sachverhaltes bestimmt die Wirklichkeit näher.)

Die Wirklichkeit besteht aus Tatsachen, nicht aus Dingen. Die gesamte Wirklichkeit ist die *Welt*.

Eine Tatsache kann Teile haben, die ihrerseits wieder Tatsachen sind. Dabei kann jeder einzelne Sachverhalt bestehen oder nicht bestehen, unabhängig von den übrigen Sachverhalten. Eine solche Tatsache heißt *zusammengesetzt* (z. B. mein Gesichtsfeld).

Zwei Tatsachen können also eine Tatsache gemein haben.

Zwei Tatsachen können aber auch in einer andern Art übereinstimmen, z. B. die Tatsache »Dieser Fleck ist gelb« und die Tatsache »Jener Fleck ist gelb«. Gemeinsam ist beiden Tatsachen die Farbe Gelb, die für sich allein noch keine Tatsache ist. Gelb ist ein unselbständiger Zug an den Tatsachen.

Man kann den Sachverhalt zerlegen, indem man angibt, in welchen Zügen er mit andern Sachverhalten übereinstimmt. Diese Zerlegung ist nur in Gedanken ausführbar, nicht in der Wirklichkeit. Jeder Zug der an einem Sachverhalt auftritt, heißt auch ein *Element* (Glied, Bestandteil) des Sachverhaltes.

Im Sachverhalt sind die Elemente miteinander verkettet. Der Sachverhalt ist eine Verbindung von Elementen.

Ein Sachverhalt ist *komplex* heißt: Er hat etwas - einen Zug - mit andern Sachverhalten gemein.

Jeder Sachverhalt ist komplex.

Der Sachverhalt ist nur auf *eine* Art zerlegbar.

Das, was bestehen oder nicht bestehen kann, ist die Konfiguration der Elemente.

Die Elemente sind das Feste, Beständige in der Welt; die Sachverhalte das Wechselnde, Unbeständige.

Die Mannigfaltigkeit der Sachverhalte kommt dadurch zustande, daß dieselben Elemente zu immer neuen Konfigurationen - zu immer neuen Sachverhalten - zusammentreten.

Die Existenz fester Elemente ist keine Hypothese. Gäbe es keine festen Elemente, so wäre überhaupt keinerlei Beschreibung möglich.

Wie die Elemente miteinander verkettet sind - das ist die *Struktur* des Sachverhaltes.

Die *Form* ist die Möglichkeit der Struktur.

Das Element ist etwas Unselbständiges. Das Element kommt nur in der Verbindung des Sachverhaltes vor.

Kenne ich das Element, so weiß ich zwar noch nicht, in welchem Sachverhalt es vorkommt, wohl aber, in welcher Verbindung es vorkommen *kann*; d. h. ich kenne die Form des Sachverhal-

As proposições a seguir são apenas para fins elucidativos. As seguintes explicações são úteis apenas como paráfrases. O propósito destas elucidações e paráfrases é o esclarecimento lógico dos nossos pensamentos. Seu resultado não são proposições, mas a correta compreensão das proposições.

1. *Estado de Coisas, Fato, Realidade*

Um *estado de coisas* é tudo que pode ou não existir.

A existência e a inexistência de um estado de coisas é chamada de *fato*.

A realidade é a existência e não existência de fatos. (A inexistência de um fato também determina mais de perto a realidade.)

A realidade é composta de fatos, não de coisas. A realidade total é o *mundo*.

Um fato pode ter partes que, por sua vez, são fatos. Cada estado de coisas em particular pode ou não existir, independentemente dos outros estados de coisas. Tal fato é chamado de *composito* (por exemplo, meu campo de visão).

Portanto, dois fatos podem ter um fato em comum.

Dois fatos também podem coincidir de outra maneira, por exemplo o fato “Esta mancha é amarela” e o fato “Aquela mancha é amarela”. Ambos os fatos têm em comum a cor amarela, o que por si só ainda não é um fato. O amarelo é um traço dependente dos fatos.

O estado de coisas pode ser decomposto especificando-se as características em que concorda com outros estados de coisas. Esta decomposição só pode ser realizada no pensamento, não na realidade. Cada característica que ocorre em um estado de coisas também é chamada de *elemento* (elo, componente) do estado de coisas.

No estado de coisas, os elementos estão ligados uns aos outros. O estado de coisas é uma combinação de elementos.

Um estado de coisas é *complexo* significa: ele tem algo - uma característica - em comum com outros estados de coisas.

Todo estado de coisas é complexo.

O estado de coisas só pode ser decomposto de *uma* maneira.

O que pode ou não pode existir é a configuração dos elementos.

Os elementos são os fixos, permanentes no mundo; os estados de coisas se alteram, são impermanentes.

A multiplicidade dos estados de coisas surge do fato de que os mesmos elementos se reúnem em configurações sempre novas - em estados de coisas sempre novos.

A existência de elementos fixos não é uma hipótese. Se não houvesse elementos fixos, nenhuma descrição seria possível.

Como os elementos estão ligados - esta é a *estrutura* dos estados de coisas.

A *forma* é a possibilidade da estrutura.

O elemento é algo dependente. O elemento ocorre apenas na conexão dos estados de coisa.

Se conheço o elemento, ainda não sei em que estado de coisas ele ocorre, mas sei em que conexão *pode* ocorrer; isto é, conheço a forma do estado de coisas em que ocorre.

A cor só ocorre em conexão com algo espacial, o tom somente em conexão com a intensidade do tom etc.

A possibilidade da ocorrência nos estados de coisa já está contida no elemento. Esta possibites, in dem es vorkommt.

Die Farbe kommt nur in Verbindung mit etwas Räumlichem vor, die Tonhöhe nur in Verbindung mit einer Tonstärke etc.

Die Möglichkeit des Vorkommens in Sachverhalten ist schon im Element enthalten. Diese Möglichkeit heißt seine *Form*.

Das Element *hat* schon eine Form; sie kann ihm nicht erst nachträglich hinzugefügt werden. Nach der Form eines Elementes kann man nicht *suchen*.

Die Gesamtheit der möglichen Sachlagen ist begrenzt durch die Gesamtheit der Elemente.

2. Sprache

Wir machen uns innere Bilder der Tatsachen. Diese Bilder sind unsere *Gedanken*.

Was im Gedanken gedacht wird, ist der *Sinn*.

Der Sinn des Gedankens ist das Bestehen oder Nichtbestehen von Sachverhalten.

Gegenstand des Denkens ist also immer eine Tatsache, nie ein Ding (Glied, Element).

Der Gedanke kann jeden Sachverhalt abbilden, den bestehenden und den nichtbestehenden.

Wir greifen mit dem Gedanken über die Wirklichkeit hinaus.

Im *Satz* drückt sich der Gedanke sinnlich wahrnehmbar aus.

Die *Sprache* ist die Methode, unsere Gedanken sinnlich wahrnehmbar darzustellen.

Die sinnlich wahrnehmbaren Tatsachen heißen *Zeichen*.

Die Sprache muß so weit reichen wie unsere Gedanken. Sie muß also nicht nur die wirklichen Tatsachen darstellen können, sondern auch die möglichen.

Mittels der Sprache verständigen wir uns. Das ist aber nur dann möglich, wenn wir den Sinn eines Satzes verstehen, ohne daß er uns erklärt wird. Müßte uns der Sinn einer Zeichenverbindung jedesmal erklärt werden, so könnten wir keinen neuen Gedanken ausdrücken. Die Sprache muß imstande sein, mit alten Zeichen einen neuen Sinn mitzuteilen.

Von einem Zeichensystem, das eine Sprache sein soll, verlangen wir demnach, daß wir mit ihm jeden beliebigen Gedanken ausdrücken können und daß wir den Ausdruck des Gedankens verstehen, ohne daß er uns erklärt wird.

Das Verfahren, dessen sich die Sprache zur Erreichung dieses Zieles bedient, ist dieses: Sie benutzt Zeichen, welche die Elemente der Sachlage vertreten, und sie stellt die Sachlage selbst durch die Verbindung der entsprechenden Zeichen dar.

Sie bildet also den Bau der Sachlage nach, indem sie die Zeichen in der entsprechenden Weise zusammenstellt.

Der Satz zeigt uns - wie ein Modell - wie die Elemente in der Sachlage zusammenhängen.

Darum verstehen wir den Satz, ohne daß er uns erklärt wird.[7]

Das *Satzzeichen* ist das sinnlich Wahrnehmbare am Satz.

Am Satzzeichen muß ebensoviel zu unterscheiden sein wie an der Sachlage. Beide müssen die gleiche *Multiplizität* besitzen.

Sehr anschaulich wird dies, wenn man die Sätze der Sprache als Anweisungen nimmt, etwas

7. Interessant an dieser Art der Selbstdarstellung des Zeigens ohne zu sagen in dieser Zwischenphase ist, dass Wittgensteins Philosophie seit dem *Tractatus* auf die Aspektansicht hinweist, die hier innerhalb eines Systems stattfindet, das das Mentale, das Normative und das Empirische intern korreliert, als der grundlegende und pragmatische Entscheidungspunkt des Weltgeschehens. (A. U.)

lidade é chamada de sua *forma*.

O elemento já *tem* uma forma; ela não pode ser adicionada a ele posteriormente. Não se pode *procurar* pela forma de um elemento.

A totalidade das situações possíveis é limitada pela totalidade dos elementos.

2. Linguagem

Fazemos imagens internas dos fatos. Estas imagens são nossos *pensamentos*.

O que é pensado no pensamento é o *sentido*.

O sentido do pensamento é a existência ou não existência de estados de coisa.

Portanto, o objeto do pensamento é sempre um fato, nunca uma coisa (membro, elemento).

O pensamento pode afigurar qualquer estado de coisas, o existente e o não existente.

Alcançamos além da realidade com o pensamento.

Na *proposição* o pensamento se expressa de forma sensivelmente perceptível.

A *linguagem* é o método de apresentar nossos pensamentos de uma forma sensivelmente perceptível.

Os fatos sensivelmente perceptíveis são chamados de *sinais*.

A linguagem tem que ir tão longe quanto nossos pensamentos. Tem que ser capaz, portanto, não só de apresentar os fatos reais, mas também os possíveis.

Nos comunicamos por meio da linguagem. Mas isto só é possível se compreendermos o sentido de uma proposição sem que ela nos seja explicada. Se o sentido de uma combinação de sinais tivesse que ser explicado para nós todas as vezes, não poderíamos expressar um novo pensamento. A linguagem tem que ser capaz de transmitir um novo sentido com sinais antigos.

Por conseguinte, exigimos de um sistema de sinais, que se supõe ser uma linguagem, que possamos expressar com ele qualquer pensamento e que compreendamos a expressão do pensamento sem que ele nos seja explicado.

O procedimento de que a linguagem se serve para atingir este objetivo é o seguinte: ela utiliza sinais que representam os elementos do estado de coisas e apresenta o próprio estado de coisas combinando os sinais correspondentes.

Assim, ela copia a estrutura do estado de coisas pela compilação dos sinais da maneira apropriada.

A proposição nos mostra - como um modelo - como os elementos estão conectados na situação.

É por isso que compreendemos a proposição sem que ela nos seja explicada.[7]

O *sinal proposicional* é o que é perceptível aos sentidos na proposição.

Tem que haver a mesma quantidade de diferenciação no sinal proposicional quanto na situ-

7. O que é interessante nesta forma de apresentação do mostrar sem dizer nesta fase intermediária é observar que desde o *Tractatus* a filosofia de Wittgenstein indica a visão de aspecto, que aqui ocorre dentro de um sistema que correlaciona internamente o mental, o normativo e o empírico, como o ponto fundamental e pragmático de decisão a respeito dos acontecimentos no mundo. (N.T.)

zu tun. Ich kann etwa jemanden durch meine Worte im Zimmer herumleiten, indem ich sage: »Geh drei Schritt nach vorn! Jetzt zwei nach links! Nun streck den rechten Arm aus! u.s.w.« Hier ist es offenbar, daß die Sprache dieselbe Multiplizität besitzen muß wie die Bewegungen.[8]

Der Satz *beschreibt* den Sachverhalt, und die Beschreibung besteht eben darin, daß wir im Satzzeichen die Form der Wirklichkeit nachziehen.

Nur sofern wir am Satzzeichen diese Form sehen, *sagt* uns das Zeichen etwas; nur insofern *verstehen* wir den Satz.

Das Satzzeichen ist selbst eine Tatsache. Sie besteht darin, daß die Zeichen (die Wörter) einen Zusammenhang von bestimmter Art - eine bestimmte Konfiguration - bilden.

Nicht: »Der Satz sagt uns, daß die Tatsache die und die Struktur hat«, sondern: »*Daß* die Zeichen im Satz zu einer Tatsache von bestimmter Struktur verbunden sind, *das drückt aus*, daß jener Sachverhalt besteht.«

Nur eine Tatsache kann einen Sinn ausdrücken.

Der Satz ist nicht eine Klasse von Wörtern. Der Satz ist gegliedert.

Darum ist das logisch Einfache unausdrückbar. Was Rot ist oder worin das Wesen des Süßen besteht, läßt sich nicht sagen. Was sich beschreiben läßt, ist immer schon komplex.

Die Möglichkeit aller Verständigung und Mitteilung beruht auf der Bildhaftigkeit unserer Sprache.

Kann man sich mit einer satzlosen Sprache verständigen? Kann man z. B. eine Sprache konstruieren, in der die Tatsachen selbst durch Zeichen vertreten werden? Ein solches System der Bezeichnung wäre durchaus möglich. Wir brauchten nur für jeden Sachverhalt ein neues Zeichen einzuführen. Auch dann wäre der Sinn eines Zeichens vollkommen bestimmt, aber jetzt wäre dieser Sinn nicht mehr aus den Zeichen selbst abzulesen. Wir könnten ihn nicht verstehen, wenn er uns nicht erklärt wird. Was wir vor uns hätten, wäre ein System von *Signalen*, aber keine Sprache.[9]

Ein solches System reicht wohl hin, um eine begrenzte Anzahl von Tatsachen zu bezeichnen; aber verständigen könnten wir uns nicht mit ihm.

Das Signal *benennt* die Sachlage, der Satz *beschreibt* sie.

Der Satz besteht aus Worten.

Ein *Wort* ist alles das, wovon der Sinn des Satzes abhängt und was Sätze miteinander gemein haben können.

Der Satz hat *Sinn*, das Wort *Bedeutung*.

Die Bedeutung eines Wortes kennt man, wenn man es anzuwenden weiß.

So wie die Elemente nur im Sachverhalt vorkommen, so kommt das Wort nur im Satz vor.

Die Sätze sind das Wechselnde, Veränderliche; die Worte das Feste, Unveränderliche.

Die Bedeutungen der Worte müssen wir festsetzen. Der Sinn des Satzes aber *ergibt* sich aus den Worten.

Die Form des Satzes ist im Wort bereits vorgebildet. Ein Eigenschaftswort verlangt z. B. eine ganz andere Art der Ergänzung als ein Beziehungswort. Kenne ich die Bedeutung eines Wortes, so weiß ich auch, in welcher Verbindung es vorkommen kann und in welcher nicht. Ich kann nicht etwa nachträglich eine neue Möglichkeit entdecken.

Die Festsetzung des syntaktischen Charakters eines Wortes wird also darin bestehen, daß

8. Vgl. oben, S. 79 , und PhB S. 57 ff. (F. H.)
9. Vgl. oben, S. 67 f. (F. H.)

ação. Ambos têm que possuir a mesma *multiplicidade*.

Isso se torna muito claro se tomarmos as proposições da linguagem como instruções para fazer algo. Por exemplo, posso guiar alguém pela sala através de minhas palavras, dizendo: "Dê três passos à frente! Agora dois para a esquerda! Agora estique o braço direito! etc." Aqui é evidente que a linguagem tem que possuir a mesma multiplicidade que os movimentos.[8]

A proposição *descreve* o estado de coisas, e a descrição consiste precisamente no fato de que traçamos a forma da realidade no sinal proposicional.

Somente na medida em que vemos esta forma no sinal proposicional é que o sinal nos *diz* algo; somente nesta medida é que *compreendemos* a proposição.

O próprio sinal proposicional é um fato. Consiste no fato de que os sinais (as palavras) formam uma conexão de um certo tipo - uma certa configuração.

Não: "A proposição nos diz que o fato tem tal e tal estrutura", mas sim: "*Que* os sinais na proposição estão ligados a um fato de uma determinada estrutura *que expressa* que este estado de coisas existe."

Só um fato pode expressar um sentido.

A proposição não é uma classe de palavras. A proposição está estruturada.

É por isso que o logicamente simples é inexprimível. O que é o vermelho ou em que consiste a essência da doçura não se pode dizer. O que pode ser descrito é sempre complexo.

A possibilidade de todo entendimento e comunicação repousa sobre a pictoriedade da nossa linguagem.

É possível se comunicar com uma linguagem sem proposições? Pode-se, por exemplo, construir uma linguagem em que os próprios fatos sejam representados por sinais? Um sistema de designação assim seria perfeitamente possível. Precisamos apenas introduzir um novo sinal para cada estado de coisas. Mesmo assim o sentido de um sinal estaria completamente determinado, mas agora este sentido não poderia mais ser lido nos próprios sinais. Não poderíamos compreendê-los se não nos fosse explicado. O que teríamos diante de nós seria um sistema de *sinais*, mas não uma linguagem.[9]

Tal sistema é provavelmente suficiente para designar um número limitado de fatos; mas não poderíamos chegar a um entendimento com ele.

O sinal *nomeia* a situação, a proposição a *descreve*.

A proposição consiste em palavras.

Uma *palavra* é tudo de que depende do sentido da proposição e do que as proposições podem ter em comum.

A proposição tem *sentido*, a palavra, *significado*.

Conhece-se o significado de uma palavra quando se sabe empregá-la.

Assim como os elementos só aparecem em um estado de coisas, a palavra ocorre apenas em uma proposição.

As proposições são alternáveis, mutáveis; as palavras são fixas, imutáveis.

Temos que estabelecer o significado das palavras. O sentido da proposição, entretanto, *resulta* das palavras.

A forma da proposição já está prefigurada na palavra. Um adjetivo requer, por exemplo, um tipo de complemento completamente diferente de uma palavra relacional. Se conheço o signi-

8. Cf. p. 80 acima, e PR pp. 57ss. (N. E.)
9. Cf. p. 68s, acima. (N. E.)

man die Form des Satzes andeutet, in dem es vorkommt; (z. B. »x ist gelb«, »x liegt rechts von y«). Die Anfügung der Variablen macht die Art der Ergänzung zu einem Satz kenntlich.

Das Wort stellt, zusammen mit den Variablen, die Möglichkeit eines Satzes dar.

Geben wir das Schema dieses Satzes an, so bestimmen wir damit die *Form* des Wortes.

Die Anfügung der Variablen allein läßt uns aber noch nicht die Form des Satzes erkennen. Wir müssen außerdem angeben, welche Werte die Variable annehmen darf.

Was unterscheidet die Variable von der Konstanten? Einfach dies, daß für das Zeichen der Variablen bestimmte Regeln der Substitution gelten. Die Angabe dieser Regeln *bestimmt* die Variable.

Zur Angabe der Form gehört also auch noch die Festsetzung der Werte, welche die Variable durchlaufen darf.

Sätze von derselben äußeren Gestalt - z. B. »xRy« - können also noch immer eine ganz verschiedene Form haben, je nachdem, welche Festsetzungen wir über die Variablen getroffen haben.

Die Form des Wortes ist die Möglichkeit seines Vorkommens im Satz. Jede solche Möglichkeit muß bereits im Wort enthalten sein. Sind uns alle Worte gegeben, so sind damit auch alle möglichen Aussagen gegeben.

Eine Verbindung von Worten (Zeichen) heißt *Ausdruck*.

Auch das Wort ist ein Ausdruck.

Ein Ausdruck, der erst durch das Hinzutreten weiterer Zeichen zu einem Satz wird, heißt *ungesättigt*.[10]

Nur solange ein Ausdruck ungesättigt ist, kann er sich mit anderen Ausdrücken verbinden. (Die Ungesättigtheit ist gleichsam die Kraft, welche die Teile eines Satzes zusammenhält.)

Ob ein Ausdruck ungesättigt ist, ergibt sich aus der Form der Worte.

Werden alle Variablen ausgefüllt, werden alle offenen Stellen gesättigt, so entsteht der Satz.

Dem gesättigten Ausdruck, dem Satz, kann nichts mehr hinzugefügt werden. Der Satz ist der Abschluß, die Grenze der Zeichenverbindung.

3 . Syntax

Wir können uns Bilder der Tatsachen machen.

Das Bild stellt das Bestehen oder das Nichtbestehen eines Sachverhaltes dar.

Was das Bild darstellt, ist sein *Sinn*.

In der Übereinstimmung seines Sinnes mit der Wirklichkeit besteht die Wahrheit des Bildes.

Nur wenn das Bild von dem Abgebildeten verschieden ist, kann es wahr oder falsch sein.

Die Fieberkurve kann das Fieber wahr oder falsch abbilden: sie hat die Multiplizität des Fiebers. Die Landschaft kann sie aber auch nicht falsch abbilden: denn diese hat eine andere Multiplizität.

Was das Bild, auch wenn es unrichtig ist, mit dem Abgebildeten gemein haben muß, ist die

10. In Freges Terminologie war ein Ausdruck für eine Funktion ungesättigt, in Gegensatz zu einem für einen Gegenstand stehenden Ausdruck. (F. H.)

ficado de uma palavra, então também sei em que conexão ela pode ocorrer e em que não. Não posso descobrir uma nova possibilidade depois.

O estabelecimento do caráter sintático de uma palavra consistirá em indicar a forma da proposição em que ocorre; (por exemplo, "x é amarelo", "x está à direita de y"). A adição das variáveis indica o tipo de complemento para uma proposição.

A palavra, junto com as variáveis, apresenta a possibilidade de uma proposição.

Se especificamos o esquema desta proposição, determinamos assim a *forma* da palavra.

A adição das variáveis por si só não nos permite, entretanto, reconhecer a forma da proposição. Também temos que especificar quais valores a variável pode assumir.

Qual é a diferença entre a variável e a constante? É simplesmente o fato de que certas regras de substituição se aplicam ao sinal da variável. A especificação dessas regras *determina* a variável.

Para a especificação da forma também se inclui o estabelecimento dos valores pelos quais a variável pode percorrer.

Proposições da mesma forma externa - por ex. B. "xRy" - podem, portanto, ainda ter uma forma completamente diferente, dependendo das determinações que fizermos sobre as variáveis.

A forma da palavra é a possibilidade da sua ocorrência na proposição. Qualquer possibilidade deste tipo já deve estar contida na palavra. Se todas as palavras nos são dadas, então com elas todas as afirmações possíveis são dadas.

Uma combinação de palavras (sinais) é chamada de *expressão*.

A palavra também é uma expressão.

Uma expressão que só se torna uma proposição quando outros sinais são adicionados é chamada de *insaturada*.[10]

Somente enquanto uma expressão for insaturada ela pode se combinar com outras expressões. (A insaturação é, por assim dizer, a força que mantém juntas as partes de uma proposição.)

Se uma expressão é insaturada isto se segue da forma das palavras.

Quando todas as variáveis forem preenchidas, quando todas as aberturas forem saturadas, a proposição é gerada.

Nada mais pode ser adicionado à expressão saturada, à proposição. A proposição é a conclusão, o limite da combinação dos sinais.

3. Sintaxe

Podemos fazer para nós imagens dos fatos.

A imagem apresenta a existência ou não existência de um estado de coisas.

O que a imagem apresenta é o seu *sentido*.

Na concordância de seu sentido com a realidade consiste a verdade da imagem.

Somente quando a imagem é diferente do que é afigurado, ela pode ser verdadeira ou falsa.

A curva da temperatura pode afigurar a febre verdadeira ou falsamente: ela tem a multiplicidade da febre. Mas ela também não pode afigurar a paisagem falsamente: porque tem uma multiplicidade diferente.

O que a imagem, mesmo que incorreta, tem que ter em comum com o afigurado é a *forma*;

10. Na terminologia de Frege, um termo para uma função era insaturado, ao contrário de um termo para um objeto. (N. E.)

Form, d. i. die Möglichkeit der Struktur.

Das *wahre* Bild hat mit dem Abgebildeten auch noch die *Struktur* gemein.

Das Bild kann alles abbilden, dessen Form es hat; etwas anderes aber kann es nicht abbilden.

Die *Syntax* besteht aus Regeln, die angeben, in welchen Verbindungen ein Wort einzig und allein einen Sinn ergibt. Durch die Syntax wird die Bildung unsinniger Wortverbindungen ausgeschlossen.

Unsere Umgangssprachen besitzen eine Syntax.

Auch die Landkarte, die Notenschrift, die Fieberkurve bilden die Wirklichkeit ab; aber sie kommen ohne Syntax aus.

Wie ist dieser Unterschied zu erklären?

Die Landkarte kann die Wirklichkeit wahr oder falsch abbilden, aber nie unsinnig. Alles, was die Karte darstellt, ist möglich.

Dagegen kann die Beschreibung durch die Wortsprache unsinnig sein. Ich kann z. B. sagen: »A liegt nördlich von B und B liegt nördlich von A«. Ein solcher Satz teilt nichts mit, da er nicht die Form der Tatsache besitzt, die er darstellen soll.

Die Syntax hängt also mit der Möglichkeit des Unsinns zusammen. (»Unsinn« ist nicht der Gegensatz zu »Sinn«. Man kann wohl sagen: Der Satz drückt einen Sinn aus, aber nicht: Der Satz drückt einen Unsinn aus. Unsinnig ist die Verwendung der Zeichen.)

Die Syntax wird also dort nötig, wo die Natur der Zeichen der Natur der Dinge noch nicht angepaßt ist; wo es mehr Zeichenverbindungen gibt als mögliche Sachlagen. Diese übergroße Mannigfaltigkeit der Sprache muß eingeengt werden durch künstliche Regeln, und diese Regeln sind die Syntax der Sprache.

Die Regeln der Syntax geben den Zeichenverbindungen gerade die Multiplizität, die sie besitzen müssen, um ein Abbild der Wirklichkeit zu sein.

Man könnte sagen: Ein Zeichensystem, das seinem Zweck vollkommen angepaßt ist, macht die Syntax überflüssig. Und umgekehrt: Die Syntax macht ein solches Zeichensystem überflüssig. Das eine vertritt das andere.[11]

Daß die Form des Zeichensystems die Syntax vertreten kann, ist wichtig, denn es zeigt uns, daß die Regeln der Syntax nichts beschreiben.

Man braucht nicht erst eine »ideale Sprache« zu erfinden, um die Wirklichkeit abzubilden. Unsere Umgangssprache *ist* schon ein logisches Bild, sobald man nur weiß, wie ein jedes Wort bezeichnet.

Es kommt nur darauf an, die Regeln der Syntax in ein System zu bringen.

Die Regeln der Syntax sind *Zeichenregeln*.

Der Unterschied zwischen einer Zeichenregel und einer Aussage ist der: Im Satz stehen die Zeichen für die Dinge. Der Satz spricht mittels der Zeichen - durch sie hindurch - von der Wirklichkeit. Er stellt sie dar.

Die Zeichenregel dagegen handelt von den Zeichen selbst. Die Zeichen vertreten die Dinge nicht. Deshalb entwirft die Zeichenregel kein Bild der Wirklichkeit: Sie ist weder wahr noch falsch.

Die Zeichen, die im Satz auftreten, sind sozusagen »transparent«; in der Zeichenregel sind sie es nicht.

Die Zeichenregel ist eine Festsetzung über den Gebrauch der Zeichen. Sie wird daher Bedeu-

11. Vgl. oben, S. 61. (F. H.)

isto é, a possibilidade da estrutura.

A imagem *verdadeira* também tem em comum com o afigurado a *estrutura*.

A imagem pode afigurar tudo cuja forma ela tiver; mas não pode afigurar algo diferente.

A *sintaxe* consiste em regras que especificam em quais conexões somente uma palavra faz sentido. Pela sintaxe exclui-se a formação de combinações disparatadas de palavras.

Nossas linguagens coloquiais possuem uma sintaxe.

O mapa, a notação musical, a curva de temperatura também afiguram a realidade; mas elas sobrevivem sem sintaxe.

Como esta diferença pode ser explicada?

O mapa pode afigurar a realidade verdadeira ou falsamente, mas nunca de maneira disparatada. Tudo o que o mapa apresenta é possível.

Em contraste, a descrição em linguagem verbal pode ser absurda. Eu posso, por exemplo, dizer: “A está ao norte de B e B está ao norte de A”. Tal proposição nada comunica porque não possui a forma do fato que deveria apresentar.

Portanto, a sintaxe está conectada com a possibilidade do contrassenso. (“Contrassenso” não é o oposto de “sentido”. Pode-se muito bem dizer: a proposição expressa um sentido, mas não: a proposição expressa um contrassenso. O emprego dos sinais é o contrassenso.)

A sintaxe torna-se necessária onde a natureza dos sinais ainda não está ajustada à natureza das coisas; onde há mais combinações de sinais do que situações possíveis. Esta excessiva multiplicidade da linguagem tem que ser restringida por regras artificiais, e estas regras são a sintaxe da linguagem.

As regras de sintaxe dão às combinações de sinais precisamente a multiplicidade que devem ter para serem uma afiguração da realidade.

Pode-se dizer: um sistema de sinais perfeitamente ajustado ao seu propósito torna a sintaxe supérflua. E vice-versa: a sintaxe torna supérfluo esse sistema de sinais. Uma se faz substituir pela outra.[11]

É importante que a forma do sistema de sinais possa se substituir pela sintaxe, pois nos mostra que as regras de sintaxe nada descrevem.

Não é preciso que se invente primeiro uma “linguagem ideal” para afigurar a realidade. Nossa linguagem ordinária já *é* uma imagem lógica desde que se saiba como cada palavra designa.

Depende apenas de trazer as regras da sintaxe para um sistema.

As regras de sintaxe são *regras de sinais*.

A diferença entre uma regra de sinais e um enunciado é esta: na proposição os sinais denotam as coisas. A proposição fala da realidade por meio de sinais - através e ao longo deles. Ela a apresenta.

A regra dos sinais, por outro lado, diz respeito aos próprios sinais: os sinais não se substituem pelas coisas. É por isto que a regra dos sinais não projeta a realidade: não é verdadeira nem falsa.

Os sinais que ocorrem na proposição são, por assim dizer, “transparentes”; na regra de sinais, não o são.

A regra dos sinais é uma estipulação do uso de sinais. Portanto, só terá significado no interior da notação empregada.

À primeira vista, uma regra de sinais parece uma proposição. (É, portanto, muitas vezes con-

11. Cf. acima, p. 62 (N. E.)

tung haben nur innerhalb der verwendeten Notation.

Auf den ersten Blick sieht eine Zeichenregel so aus wie ein Satz. (Sie wird daher häufig mit einem solchen verwechselt.) Sage ich z. B., daß eine Stelle des Gesichtsfeldes nicht zwei Farben zu gleicher Zeit haben kann, so gebe ich damit eine Regel der Syntax an und nicht eine Induktion. Denn der Satz lautet nicht: »Ein Punkt hat nie zwei Farben zu gleicher Zeit«, sondern: »Ein Punkt kann nicht zu gleicher Zeit zwei Farben haben«. Hier bedeutet das Wort »kann« die *logische Möglichkeit*, deren Ausdruck nicht ein Satz, sondern eine Regel der Syntax ist. (Die Regel begrenzt die Form der Beschreibung.)

Sehr klar wird dies, wenn wir uns das Gesichtsfeld nicht mit Worten, sondern mit einem mathematischen Symbolismus beschrieben denken, indem wir z. B. den Farbparameter als Funktion des Ortsparameters (und der Zeit) darstellen. Es wird dann schon durch die *Form* der Beschreibung zum Ausdruck gebracht, daß ein Punkt zu gegebener Zeit nur *eine* Farbe haben kann.

Um unserer gewöhnlichen Sprache die Multiplizität der mathematischen zu geben, brauchen wir ihr nur die Regel hinzuzufügen: Sätze, welche einem Punkt zu gleicher Zeit verschiedene Farben zuschreiben, sind auszuschließen.

Dies macht deutlich, wie wir entscheiden können, ob ein Satz der Umgangssprache eine Aussage oder eine Zeichenregel bedeutet: Wir sehen nach, ob wir den Satz durch Übersetzung in eine Sprache von geeigneter Multiplizität zum Verschwinden bringen können. Verschwindet er, so ist er eine Zeichenregel; denn er hängt dann *nur* von der Notation ab, und diese ist willkürlich.

4. *Symmetrie, Asymmetrie*

Ein Fall, in dem man leicht eine Zeichenregel mit einer Aussage verwechseln kann, ist die Formulierung der Symmetrie (Asymmetrie) einer Relation.

Russell[12] definiert diese Eigenschaften so: xRy ist

symmetrisch, wenn $(x, y) . xRy \supset yRx$

asymmetrisch, wenn $(x, y) . xRy \supset \sim yRx$

Hier muß man fragen: Geben die Sätze aRb, bRa verschiedenen Tatsachen Ausdruck oder nur einer?

Der Satz »a ist gleichzeitig mit b« stellt offenbar dieselbe Tatsache dar wie der Satz »b ist gleichzeitig mit a«.

Wir müssen also zwischen *wesentlicher* (logischer) und *zufälliger* (empirischer) Symmetrie und Asymmetrie unterscheiden.

Wo die Symmetrie *logische* Symmetrie bedeutet, kann sie nicht dadurch ausgedrückt werden, daß man schreibt:

$$(x, y) . xRy \supset yRx$$

denn dies setzt schon voraus, daß xRy einen anderen Sinn hat als yRx. Dieser Satz beschreibt die empirische Symmetrie. Um anzudeuten, daß es auf die asymmetrische Stellung der Zeichen »a« und »b« nicht ankommt, stellen wir die Regel auf, daß aRb dasselbe bedeuten soll wie bRa. Wir heben dadurch hervor, daß ein gewisser Zug der Symbolik unwesentlich ist, daß er nicht abbildet.

Wir könnten dieser Zeichenregel entraten, wenn wir gleich von Anfang an ein symmetrisch gebautes Satzzeichen benutzen.

12. Whitehead u. Russell, *Principia Mathematica* I, Cambridge, 1910, S. 32.(F. H.)

fundido com uma.) Se eu disser, por exemplo, que um ponto no campo de visual não pode ter duas cores ao mesmo tempo, estou dando uma regra da sintaxe e não uma indução. Porque a proposição não soa como: “Um ponto nunca tem duas cores ao mesmo tempo”, mas sim: “Um ponto não pode ter duas cores ao mesmo tempo”. Aqui, a palavra “pode” significa a *possibilidade lógica*, cuja expressão não é uma proposição, mas uma regra da sintaxe. (A regra delimita a forma da descrição.)

Isto se torna muito claro quando pensamos no campo de visual como descrito não com palavras, mas com um simbolismo matemático apresentando o parâmetro de cor em função do parâmetro de localização (e de tempo). Então, já está expresso na *forma* da descrição que um ponto só pode ter *uma* cor em um determinado momento.

Para dar à nossa linguagem comum a multiplicidade da matemática precisamos apenas adicionar a ela a regra: as proposições que atribuem cores diferentes a um ponto ao mesmo tempo devem ser excluídas.

Isto deixa claro como podemos decidir se uma proposição na linguagem ordinária significa um enunciado ou uma regra de sinais: vemos se podemos fazer desaparecer a proposição traduzindo-a em uma linguagem com a multiplicidade adequada. Se ela desaparecer, é uma regra de sinais; porque então depende *somente* da notação, e isto é arbitrário.

4. *Simetria, assimetria*

Um caso em que se pode facilmente confundir uma regra de sinais com um enunciado é a formulação da simetria (assimetria) de uma relação.

Russell[12] define estas propriedades da seguinte maneira: xRy é

simétrico se $(x, y). xRy \supset yRx$

assimétrico se $(x, y). xRy \supset \sim yRx$

Aqui deve-se perguntar: as sentenças aRb, bRa expressam fatos diferentes ou apenas um fato?

A proposição “a é simultâneo com b” evidentemente representa o mesmo fato que a proposição “b é simultâneo com a”.

Portanto, temos que distinguir entre simetria e assimetria *essencial* (lógica) e *acidental* (empírica).

Onde simetria significa simetria *lógica*, não pode ser expressa por escrito como:

$$(x, y). xRy \supset yRx$$

porque isto pressupõe que xRy tem um significado diferente de yRx. Esta frase descreve a simetria empírica. Para indicar que a posição assimétrica dos sinais “a” e “b” não tem consequência, estabelecemos a regra de que aRb deve significar o mesmo que bRa. Ressaltamos que certa característica do simbolismo não é essecial, que não afigura.

Poderíamos escapar desta regra de sinais se usarmos um sinal proposicional construído simetricamente desde o início.

A assimetria lógica tem que ser formulada de tal forma que o produto lógico das proposições aRb e bRa se torne uma contradição. (Novamente, isto é feito por uma regra de sinais.)

12. Whitehead &. Russell, *Principia Mathematica* I, Cambridge, 1910, p. 32.(N. E.)

Die logische Asymmetrie muß so formuliert werden, daß das logische Produkt der Sätze aRb und bRa eine Kontradiktion wird. (Dies geschieht wieder durch eine Zeichenregel.)

In allen diesen Fällen handelt es sich darum, einem Zeichensystem die zur Abbildung erforderliche Multiplizität zu geben.

5. Identität

Wenn wir denselben Gegenstand einmal mit »a«, das andere Mal mit »b« bezeichnen, so treten in der Sprache mehr Zeichen auf, als für die Abbildung der Tatsachen notwendig sind. Wir müssen nun erklären, daß dieses Mehr an Zeichen nichts bedeutet; daß die Verschiedenheit der Zeichen kein abbildender Zug der Symbolik ist. Dies geschieht durch die Zeichenregel »a = b«. Kenne ich die Bedeutung des Zeichens »a«, so sagt mir diese Regel, was ich unter »b« zu verstehen habe.

Diese Regel spricht also nicht von der Wirklichkeit. Sie sagt nicht: Die durch »a« und »b« bezeichneten Gegenstände stehen in der Beziehung der Identität zueinander; sondern sie handelt von den Zeichen selbst. Sie ist eine Festsetzung über den Gebrauch der Zeichen.

Die falsche Auffassung von der Identität entsteht, sobald man die Zeichen in ihrer Bedeutung nimmt. Dann sieht es so aus, als würde »a = b« ein Satz sein, der mittels der Zeichen - durch sie hindurch - von den Dingen spricht.

Daß aber die Identität nur eine Zeichenregel ist, ersehen wir daraus, daß sie verschwindet, sobald wir uns einer Sprache bedienen, die jeden Gegenstand durch *ein* Zeichen darstellt.

Russell hat die Identität in folgender Weise zu formulieren gesucht: »Identisch sind zwei Dinge a und b dann, wenn sie ihre sämtlichen Eigenschaften gemein haben.«

$$a = b \,.\! =: (\varphi) : \varphi\,!\,a \,.\supset .\, \varphi!\,b : Df$$

Dieser Satz trifft das Wesen der Identität nicht. Denn um ihn zu verstehen, muß ich den Zeichen »a« und »b« eine Bedeutung gegeben haben, und indem ich ihnen eine Bedeutung gebe, weiß ich, ob sie dasselbe bedeuten oder nicht.

Dasselbe ist von dem Versuch F. P. Ramseys zu sagen.[13]

Der Irrtum Russells besteht nicht darin, daß er die Identität *falsch* formuliert hat, sondern darin, daß er sie überhaupt *formuliert* hat. Es ist unsinnig, durch einen Satz *das* formulieren zu wollen, was die Bedingung für das Verstehen des Satzes bildet.

Damit fällt auch Russells Versuch, die Klasse, die z. B. aus den beiden Dingen a und b besteht, mit Hilfe der Identität zu definieren.[14]

6. Verifikation

Wer einen Satz ausspricht, der muß wissen, unter welchen Bedingungen er den Satz wahr oder falsch nennt; vermag er das nicht anzugeben, so weiß er auch nicht, was er gesagt hat.

Einen Satz verstehen, heißt, wissen, wie es sich verhält, wenn der Satz wahr ist.

Man kann ihn verstehen, ohne zu wissen, *ob* er wahr ist.

Um sich den Sinn eines Satzes zu vergegenwärtigen, muß man sich das Verfahren klar ma-

13. Vgl. oben, S. 223 ff. (F. H.)

14. Vgl., z. B., *Introduction to Mathematical Philosophy*², London, 1920, p. 12 . (F. H.)

Em todos estes casos, trata-se de dar a um sistema de sinais a multiplicidade necessária para a afiguração.

5. Identidade

Se designarmos o mesmo objeto uma vez como “a” e a outra vez como “b”, então ocorrem mais sinais na linguagem do que o necessário para a afiguração dos fatos. Temos agora que explicar que este sinal adicional não significa nada; que a diferença de sinais não é um traço afigurativo do simbolismo. Isto se dá usando a regra de sinal “a = b”. Se eu sei o significado do sinal “a”, esta regra me diz o que entender por “b”.

Portanto, esta regra não fala da realidade. Não diz: os objetos denotados por “a” e “b” mantêm uma relação de identidade entre si; mas trata dos próprios sinais, é uma estipulação sobre o uso dos sinais.

A concepção errada de identidade surge assim que se toma os sinais pelo seu significado. Então parece que “a = b” é uma proposição que fala das coisas por meio dos sinais - através e ao longo deles.

Mas vemos que a identidade é apenas uma regra de sinais pelo fato de que ela desaparece assim que usamos uma linguagem que apresenta cada objeto por meio de *um* sinal.

Russell tentou formular a identidade da seguinte maneira: “Duas coisas a e b são idênticas se têm todas as suas propriedades em comum.”

$$a = b \,.\! =: (\varphi) : \varphi\,!\,a \,.\supset .\, \varphi!\,b : Df$$

Esta proposição não atinge a essência da identidade. Pois, para entendê-la, tenho que ter dado aos sinais “a” e “b” um significado e, ao dar-lhes um significado, sei se eles significam a mesma coisa ou não.

O mesmo pode ser dito da tentativa de F. P. Ramsey.[13]

O erro de Russell não é que ele formulou a identidade *incorretamente*, mas que ele, em suma, a *formulou*. É um contrassenso querer formular *a identidade* por meio de uma proposição que constitui a condição para a compreensão daproposição.

Isto também inclui a tentativa de Russell de definir a classe que consiste, por exemplo, em duas coisas a e b, com a ajuda da identidade.[14]

6. Verificação

Quem profere uma proposição tem que saber em que condições a chama de verdadeira ou falsa; se ele é incapaz de indicar isto, também não sabe o que disse.

Compreender uma proposição significa saber como é que ocorre quando a proposição é verdadeira.

Pode-se compreendê-la sem saber *se* ela é verdadeira.

13. Ver, acima, p. 224ss (N. E.)

14. Cf., por exemplo., *Introduction to Mathematical Philosophy*², London, 1920, p. 12 . (N. E.)

chen, das zur Feststellung seiner Wahrheit führt. Kennt man dieses Verfahren nicht, so kann man den Satz auch nicht verstehen.

Ein Satz kann nicht mehr sagen, als was durch die Methode der Verifikation festgestellt wird. Sage ich: »Mein Freund ist zornig« und stelle ich dies dadurch fest, daß er ein bestimmtes wahrnehmbares Verhalten zeigt, so *meine* ich damit auch nur, daß er dieses Verhalten zeigt. Und wenn ich mehr meine, so kann ich nicht angeben, worin dieses Mehr besteht. Ein Satz sagt nur, was er sagt und nichts darüber hinaus.

Der Sinn eines Satzes ist die Art seiner Verifikation.

Die Methode der Verifikation ist nicht ein Mittel, ein Vehikel, sondern der Sinn selbst.

Ich kann wohl sagen: »Ich fahre nach A« oder: »Ich gehe zu Fuß nach A«, dann haben wir zwei Vehikel für dasselbe, nämlich für die Entfernung im Raum. Ich kann aber nicht sagen: »Ich verifiziere den Satz auf diese oder auf jene Weise.« Die Methode der Verifikation ist ja nicht etwas, was erst dem Sinn hinzugefügt wird. Der Satz *enthält* schon die Methode seiner Verifikation. Nach einer Methode der Verifikation kann man nicht *suchen*.

Eine Aussage hat Sinn, heißt: Sie kann verifiziert werden.

Ob eine Aussage Sinn hat, kann nie eine Frage der Erfahrung sein. Denn die Erfahrung lehrt nur, ob ein Satz wahr oder falsch ist. Um aber festzustellen, ob der Satz wahr oder falsch ist, muß ich ihm schon einen Sinn gegeben haben.

Darum kann, ob ein Satz Sinn hat, nie davon abhängen, ob er wahr ist.

Sind zwei Sätze unter denselben Bedingungen wahr oder falsch, so haben sie denselben Sinn, (auch wenn sie uns verschieden erscheinen).

Bestimme ich, unter welchen Bedingungen ein Satz wahr oder falsch sein soll, so bestimme ich damit den *Sinn* des Satzes. (Das ist die Grundlage der Wahrheitsfunktionen.)

Kann ich *immer* zweifeln, ob ein Satz verifiziert ist? Könnte es nicht sein, daß ihn die Verifikationen nur wahrscheinlich machen? Kann ich aber nicht angeben, unter welchen Umständen der Satz als verifiziert gelten soll, so habe ich dem Satz keinen Sinn gegeben. Eine Aussage, die nicht endgültig verifiziert werden kann, ist überhaupt nicht verifizierbar.

Der absolute Zweifel ist unberechtigt.

Ein Satz, der sich auf keine Weise verifizieren läßt, hat keinen Sinn.

Unlösbare Fragen gibt es nicht.

Was ist eine Frage? Eine Aufforderung zu suchen. Die Frage leitet gleichsam eine Denkbewegung ein, an deren Ende die Antwort steht. Die Richtung dieser Bewegung ist bestimmt durch den logischen Ort der Antwort. Gibt es die Antwort nicht, so fehlt die Richtung, in der man suchen kann; es gibt also die Denkbewegung nicht, und das heißt: *Es besteht keine Frage*.

Man kann nur fragen, wo man suchen kann. Und man kann nur suchen, wo es eine Methode des Suchens gibt. Suchen heißt systematisch suchen.[15]

Eine Aussage hat nicht deshalb Sinn, weil sie rechtmäßig gebaut ist,[16] sondern weil sie sich verifizieren läßt. Jede verifizierbare Aussage ist daher rechtmäßig gebaut. Gebe ich die Methode der Verifikation an, so bestimme ich damit die Form des Satzes, die Bedeutung seiner Worte, die Regeln der Syntax etc.

Um zu erfahren, was ein Zeichen bedeutet, muß man fragen: Wie wird der Satz, in dem dieses Zeichen vorkommt, verifiziert? Dasselbe Wort kann in Sätzen, die auf verschiedene Art verifi-

15. Vgl. oben, S. 5 ff. u. passim. (F. H.)

16. Wahrscheinlich eine Anspielung auf R. Carnap, vgl. z. B. seine »Überwindung der Metaphysik usw.« in *Erkenntnis*, 2 (1931), S. 227. (F. H.)

Para visualizar o sentido de uma proposição, tem-se que tornar claro o procedimento que leva ao estabelecimento da sua verdade. Se não se conhece este procedimento, não consegue compreender a proposição.

Uma proposição não pode dizer mais do que o estabelecido pelo método de verificação. Se digo: “Meu amigo está com raiva”, e o estabeleço mostrando que ele está exibindo um certo comportamento perceptível, só *quero dizer* que ele está mostrando esse comportamento. E se quero dizer mais, não posso indicar em que consiste mais. Uma proposição diz apenas o que diz e nada mais.

O sentido de uma proposição é maneira como é verificada.

O método de verificação não é um meio, um veículo, mas o próprio sentido.

Posso dizer: “Vou para A” ou: “Vou a pé para A”, então temos dois veículos para a mesma coisa, nomeadamente para a distância no espaço. Mas não posso dizer: “Eu verifico a proposição desta ou daquela maneira.” O método de verificação não é algo que é adicionado com anterioridade ao sentido. A proposição já *contém* o método da sua verificação. Não se pode *procurar* por um método de verificação.

Uma proposição tem sentido, significa: ela pode ser verificada.

Se um enunciado tem sentido, esta nunca pode ser uma questão da experiência. Pois a experiência só ensina se uma proposição é verdadeira ou falsa. Mas, para estabelecer se a proposição é verdadeira ou falsa, já tenho que ter dado a ela um sentido.

Portanto, se uma proposição tiver sentido, isto nunca pode depender dela ser verdadeira.

Se duas sentenças são verdadeiras ou falsas nas mesmas condições, elas têm o mesmo significado (mesmo que pareçam diferentes para nós).

Se eu determinar as condições sob as quais uma proposição deve ser verdadeira ou falsa, então determino o *sentido* da proposição. (Este é o fundamento das funções de verdade.)

Sempre posso duvidar que uma proposição tenha sido verificada? Não poderia ser o caso de que as verificações apenas a tornassem provável? Mas se eu não posso especificar as circunstâncias sob as quais a proposição deve ser considerada como verificada, então não dei nenhum sentido para a proposição. Um enunciado que definitivamente não pode ser verificado, não é de todo verificável.

A dúvida absoluta é injustificada.

Uma proposição que não pode ser verificada de forma alguma não tem sentido.

Não existem questões insolúveis.

O que é uma questão? Uma provocação para procurar. A questão inicia, por assim dizer, um movimento de pensamento em cujo fim está a resposta. A direção deste movimento é determinada pelo lugar lógico da resposta. Se não houver resposta, não há direção na qual procurar; portanto, não há movimento do pensamento, e isto significa: *não há uma questão*.

Só podemos perguntar para onde se pode procurar. E só se pode procurar onde existe um método de busca. Procurar significa buscar sistematicamente.[15]

Um enunciado não tem sentido porque é legitimamente construído,[16] mas porque pode ser verificado. Qualquer enunciado verificável é, por conseguinte, construída da forma mais legítima. Se eu especificar o método de verificação, eu o uso para determinar a forma da proposição, o significado das suas palavras, as regras de sintaxe etc.

15. Cf. acima, pp. 6ss e *passim*. (N. E.)

16. Provavelmente uma alusão a R. Carnap, cf. o seu »Überwindung der Metaphysik usw.« in *Erkenntnis*, 2 (1931), p. 227. (N. E.)

ziert werden, verschiedene Bedeutungen haben. Wir haben es dann eben mit verschiedenen Symbolen zu tun, die nur zufällig das Zeichen gemein haben.

So bedeutet z. B. das Wort »gelb« im täglichen Leben etwas ganz anderes als in der Physik. Denn im einen Fall wird ein Satz über Gelb durch Hinsehen verifiziert, im anderen durch Messung der Wellenlänge. (Beachtet man diesen Unterschied nicht, so entsteht der Schein, als wären die gesehenen Farben etwas Unvollständiges, als wäre z. B. Infrarot ihre Ergänzung.)

7. Definition

Das angewandte, von Regeln geleitete Zeichen ist das *Symbol*.

Das Zeichen ist das sinnlich Wahrnehmbare am Symbol. (Zwei Symbole können also das Zeichen gemein haben. Das Zeichen symbolisiert dann in beiden Fällen verschieden.)

Die Art der Verwendung eines Zeichens ist seine *Bedeutung*.

Die Bedeutung ist das Gemeinsame aller Symbole, die einander vertreten können.

So ist z. B. die Negation die gemeinsame Regel, nach der die Sätze ~p, p | p, p ⊃ ~p etc. gebildet sind.

Einern Zeichen Bedeutung geben heißt: eine Regel aufstellen für seinen Gebrauch.

Wir können einem Zeichen auf zwei Arten Bedeutung geben: 1 . Durch *Aufweisung*. In diesem Fall erklären wir die Verwendung eines Wortes in Aussagen, indem wir mit dem Wort verschiedene Sätze bilden und dabei jedesmal auf die entsprechende Tatsache hinweisen. So werden wir der Bedeutung des Wortes inne. (Die Aufweisung besteht eigentlich aus zwei Akten: aus einer äußeren Handlung, dem Hinweisen auf verschiedene Tatsachen, und aus einer Gedankenoperation, nämlich dem Innewerden des Gemeinsamen.) 2. Durch *Definition*. In diesem Fall wird die Bedeutung eines Zeichens erklärt mit Hilfe von Zeichen, die schon eine Bedeutung besitzen.

Die Definition verbleibt innerhalb der Sprache. Die Aufweisung tritt aus der Sprache hinaus und setzt die Zeichen in Verbindung mit der Wirklichkeit. Die Definition kann in der Sprache ausgedrückt werden, die Aufweisung nicht.

Gemeinsam ist der Aufweisung und der Definition, daß beide eine Regel für die Verwendung eines Zeichens angeben.

Die Bedeutung eines Zeichens kennt man, wenn man den Sinn der Sätze versteht, in welchen es vorkommt.

Ein Zeichen definieren wird also bedeuten: den Sinn der Sätze erklären, in welchen es vorkommt.

Die Definition wird somit in der Angabe einer Regel bestehen, die sagt, wie der Sinn eines Satzes, in dem dieses Zeichen vorkommt, durch andere Zeichen auszudrücken ist.

Die Definition ist eine Übersetzungsregel: sie übersetzt den Satz in andere Zeichen.

Der Sinn des Satzes bleibt bei der Übersetzung erhalten.

Die Definition ist eine Zeichenregel: Sie ist weder wahr noch falsch.

Die Definition muß *vollständig* sein.

Haben wir einmal ein Zeichen durch Definition eingeführt, so muß es nun in allen Verbindungen eingeführt sein. Wir dürfen ein Zeichen nicht stückweise definieren, indem wir seine Bedeutung zuerst für eine Klasse von Fällen erklären, dann für eine andere Klasse. (So betrach-

Para descobrir o que significa um sinal, tem-se que perguntar: como se verifica a proposição em que ocorre este sinal? A mesma palavra pode ter significados diferentes nas proposições em que são verificadas de maneiras diferentes. Estamos, então, lidando com símbolos diferentes que por acaso têm o mesmo sinal em comum.

Assim, por exemplo, a palavra “amarelo” tem um significado totalmente diferente na vida cotidiana do que tem na física. Porque em um caso uma proposição sobre o amarelo é verificada pelo olhar, e no outro, medindo o comprimento de onda. (Se não se observa esta diferença, a aparência surgirá como se as cores vistas fossem algo incompleto, como se, por exemplo, o infravermelho fosse o seu complemento.)

7. Definição

O sinal baseado em regras usado é o símbolo.

O sinal é o que é sensivelmente perceptível no símbolo. (Dois símbolos podem, portanto, ter o mesmo sinal. O sinal então simboliza de forma diferente em ambos os casos.)

A forma como um sinal é empregado é o seu *significado*.

O significado é comum a todos os símbolos que podem representar uns aos outros.

Assim, a negação é, por exemplo, a regra comum segundo a qual as proposições ~ p, p | p, p ⊃ ~ p etc. são formadas.

Dar significado a um sinal significa: estabelecer uma regra para seu uso.

Podemos dar significado a um sinal de duas maneiras: 1. pela *exibição*. Neste caso, explicamos o emprego de uma palavra nos enunciados formando proposições diferentes com a palavra que a cada vez assinala o fato correspondente. É assim que nos damos conta do significado da palavra. (Na verdade, a exibição consiste em dois atos: um ato externo, com indicação de vários fatos, e uma operação de pensamento, a saber, a percepção do que é comum.) 2. Pela *definição*. Neste caso, o significado de um sinal é explicado com a ajuda de sinais que já possuem um significado.

A definição permanece dentro da linguagem. A exibição emerge da linguagem e coloca os sinais em conexão com a realidade. A definição pode ser expressa na linguagem, a exibição não.

O que é comum à exibição e à definição é que ambas especificam uma regra para o emprego de um sinal.

Conhece-se o significado de um sinal quando se compreende o significado das proposições em que ele ocorre.

Definir um sinal portanto, significa: explicar o sentido das proposições em que ele ocorre.

A definição consistirá, portanto, em dar uma regra que diga como o sentido de uma proposição em que este sinal ocorre deve ser expresso por outros sinais.

A definição é uma regra de tradução: ela traduz a proposição por outros sinais.

O significado da proposição é mantido na tradução.

A definição é uma regra de sinais: não é verdadeira nem falsa.

A definição tem que ser *completa*.

Uma vez que tenhamos introduzido um sinal por definição, ele agora tem que ser introduzido em todas as conexões. Não devemos definir um sinal aos poucos, explicando seu significado primeiro para uma classe de casos, depois para outra classe. (Por exemplo, Russell considera a negação na frente de uma proposição elementar como um sinal básico indefinido e, em seguida, explica novamente quando está na frente de um enunciado geral.)

tet z. B. Russell die Negation vor einem elementaren Satz als undefiniertes Grundzeichen und erklärt sie dann noch einmal, wenn sie vor einer generellen Aussage steht.)

Die Definition erklärt die Bedeutung eines Zeichens mittels anderer Zeichen. Ein Zeichen weist so auf ein anderes hin, dieses wieder auf ein anderes etc., und so sind die Zeichen geordnet.

Ein Zeichen bezeichnet auf dem Weg über alle Zeichen, durch welche es definiert wurde.

Lösen wir die Zeichen in einer Aussage auf, indem wir sie gemäß der Definition durch andere Zeichen ersetzen, diese wieder durch andere u.s.f., so wird Schritt für Schritt der Weg der Verifikation sichtbar.

Definitionen sind Wegzeichen. Sie weisen den Weg zur Verifikation.

Wir sagten früher: Der Satz enthält die Methode seiner Verifikation. Das ist in dem Sinne wahr, daß der Satz die Definitionen der Zeichen enthält, mit welchen er gebildet ist, und daß uns diese Definitionen bei der Verifikation leiten.

Der Weg der Verifikation kann nicht ins Unendliche gehen. (Eine »unendliche Verifikation« wäre keine Verifikation mehr.)

Ein Satz kann zwar auf andere Sätze zurückgehen, diese wieder auf andere etc., aber schließlich müssen wir einmal auf Sätze kommen, die nicht wieder auf andere Sätze verweisen, sondern auf die Wirklichkeit. Oder vielmehr: Der sinnvolle Satz spricht schon, durch die ganze Kette der Definition hindurch, von der Wirklichkeit.

Wäre es anders, so könnte kein Satz verifiziert werden. Es gäbe dann keinen Zusammenhang zwischen Sprache und Welt.

Die Sätze, welche unmittelbar von der Wirklichkeit handeln, heißen *Elementarsätze*.

Daß es Elementarsätze gibt, ist keine Hypothese. Die Forderung der Existenz von Elementarsätzen ist die Forderung, daß unsere Aussagen Sinn haben. Daß wir die Sätze unserer gewöhnlichen Sprache verstehen, bürgt also schon dafür, daß es Elementarsätze gibt.

Die Elementarsätze sind das, was allen anderen Sätzen Sinn gibt. Wir können die Sätze unserer Umgangssprache verstehen, ohne zu wissen, wie die Elementarsätze aussehen. So wie wir die meisten Ausdrücke verstehen, ohne eine Kenntnis ihrer Definition zu haben, oder wie wir uns bewegen, ohne zu wissen, wie jede einzelne Bewegung zustande kommt.

Man könnte fragen: Wie ist es möglich, daß wir die Sätze unserer Umgangssprache verstehen, wenn wir die Elementarsätze nicht kennen? Die Antwort lautet: Eine Regel *anwenden* heißt nicht: *um die Regel wissen*. Wir können z. B. neue Zeichen einführen durch Definition und wir können die schon bekannten Zeichen durch Definition zergliedern. In diesem letzten Fall *verdeutlicht* uns nur die Definition den Sinn der Sätze. Diese selbst aber können wir verstehen, ohne den Wortlaut der Definition zu kennen.

So verdeutlicht uns auch die logische Analyse den Sinn der Sätze, indem sie deren Zeichen zergliedert; aber sie gibt ihnen nicht erst den Sinn. Haben wir einen Satz vollständig analysiert, so müssen wir am Ende der Analyse das Gefühl haben: Gerade das haben wir ja immer schon mit dem Aussprechen des Satzes gemeint. (Die Analyse darf uns nie überraschen.)

Stünde der Sinn unserer Aussagen nicht schon fest - wie wüßten wir dann, welche Analyse die richtige ist?

Wie sonderbar ist doch die Ansicht, daß die logische Analyse erst *erkläre*, was wir mit den Sätzen der Umgangssprache meinen! Weiß ich also nicht, was ich meine, wenn ich sage: »Heute ist es kälter als gestern«? Muß ich erst auf das Ergebnis der logischen Analyse warten? Aber es verhält sich ja gerade umgekehrt: Unsere Aussagen haben schon einen Sinn und dieser Sinn

A definição explica o significado de um sinal por meio dos outros sinais. Um sinal aponta para o outro, este de novo para o outro etc., e é assim que os sinais estão dispostos.

Um sinal denota o caminho para todos os sinais mediante os quais foi definido.

Se dissolvermos os sinais em um enunciado, substituindo-os por outros sinais de acordo com a definição, estes novamente por outros etc., o caminho da verificação torna-se visível passo a passo.

As definições são placas de sinalização. Eles indicam o caminho para a verificação.

Dissemos anteriormente: a proposição contém o método de sua verificação. Isto é verdade no sentido de que a proposição contém as definições dos sinais com os quais é formada, e que estas definições nos guiam na verificação.

O caminho de verificação não pode continuar para sempre. (Uma "verificação infinita" não seria mais uma verificação.)

Uma proposição pode de fato remontar a outras proposições, estas novamente a outras etc., mas finalmente temos que chegar a proposições que não se referem a outras proposições, mas à realidade. Ou melhor: a proposição significativa já fala da realidade em toda a cadeia de definição.

Se fosse diferente, nenhuma proposição poderia ser verificada. Não haveria então conexão entre a linguagem e o mundo.

As proposições que lidam diretamente com a realidade são chamadas de proposições elementares.

Que hajam proposições elementares não é uma hipótese. O requisito da existência de proposições elementares é o requisito de que nossos enunciados tenham sentido. O fato de compreendermos as proposições da nossa linguagem comum garante que existam proposições elementares.

As proposições elementares são o que dão sentido a todas as outras proposições. Podemos compreender as proposições da nossa linguagem ordinária sem saber como são as proposições elementares. Assim como compreendemos a maioria das expressões sem ter um conhecimento da sua definição, ou como nos movemos sem saber como ocorre cada movimento individual.

Poder-se-ia perguntar: como é possível compreendermos as proposições da nossa linguagem ordinária se não conhecemos as proposições elementares? A resposta seria: *aplicar* uma regra não significa: *saber sobre a regra*. Podemos, por exemplo, introduzir novos sinais por definição e podemos separar os sinais já conhecidos por definição. Neste último caso, só a definição nos *esclarece* o sentido das proposições. Mas podemos compreender as próprias proposições sem conhecer o teor da definição.

Deste modo, a análise lógica também nos esclarece o sentido das proposições, decompondo seus sinais; mas não lhes dá sentido com anterioridade. Se analisamos completamente uma proposição, ao final da análise temos que ter o sentimento: isto é exatamente o que sempre quisemos dizer quando proferimos a proposição. (A análise nunca deve nos surpreender.)

Se o sentido dos nossos enunciados ainda não tivesse sido determinado - como saberíamos então qual análise é a correta?

Quão estranha é a visão de que a análise lógica apenas *explica* o que queremos dizer com as proposições da linguagem ordinária! Então, não sei o que quero dizer quando digo: "Hoje está mais frio do que ontem"? Tenho que esperar o resultado da análise lógica primeiro? Porém o oposto é verdadeiro: nossos enunciados já têm um sentido e este sentido apenas determina a análise lógica.

bestimmt erst die logische Analyse.

Können wir uns aber nicht irren? Können wir uns nicht einbilden, mit einem Satz etwas zu meinen, der sich bei näherem Zusehen als sinnlos erweist? Nein. Denn eine Aussage hat Sinn, wenn es eine Methode ihrer Verifikation gibt. Und umgekehrt: Wissen wir, wie wir einen Satz zu verifizieren haben, so *hat* der Satz Sinn. Im unklaren können wir nur so lange sein, als wir uns an die äußere Sprachgestalt des Satzes halten.

Einen Satz analysieren heißt: sich darauf besinnen, wie der Satz zu verifizieren ist.

Mit den Elementarsätzen *berührt* die Sprache die Wirklichkeit.

Die Elementarsätze angeben heißt: die Sachverhalte in der Welt angeben.

Es ist klar, daß die Aussagen über die Körper (Tische, Stühle) keine Elementarsätze sind. Es wird ja auch niemand glauben, daß wir mit den Körpern die letzten Elemente der Beschreibung erreicht haben.

Was die Elementarsätze beschreiben, sind die Phänomene (die Erlebnisse).

Ich kann wohl sagen: »Dieser Konduktor ist elektrisch geladen; *denn* das Elektroskop zeigt einen Ausschlag.« Aber ich kann nicht sagen: »Der Fleck im Gesichtsfeld ist gelb; *denn* . . .«.[17] Kann ich mich zur Verifikation eines Satzes nicht mehr auf andere Sätze berufen, so ist das ein Anzeichen, daß der Satz elementar ist.

Die *Form* der Elementarsätze läßt sich nicht a priori angeben.

Die Form der Elementarsätze muß sich nach der Form der Phänomene richten, und diese können wir nicht vorhersehen.

Wenn man also fragt: »Werden die Elementarsätze Subjekt-Prädikat Form haben? Oder werden sie zweistellige Relationen sein?« so zeigt dies, daß man das Wesen der Elementarsätze noch nicht verstanden hat.

Unser Grundsatz muß sein: *Über die Elementarsätze darf es keine Hypothese geben*.[18]

Die Form der Elementarsätze kann man erst angeben, sobald man sie hat.

Eines ist klar: Der logische Bau der Elementarsätze braucht nicht die geringste Ahnlichkeit zu haben mit dem logischen Bau der Sätze unserer Umgangssprache. Denken wir z.B. daran, daß wir das Gesichtsfeld mit einem mathematischen Symbolismus beschreiben können, der von nicht geringerer Multiplizität ist, als die Gleichungen der Physik. Hier sehen wir, daß von Subjekt und Prädikat, von zweistelliger Relation etc. gar nicht mehr die Rede ist.

Die Zeichen, die im Elementarsatz auftreten heißen *Urzeichen* (elementare Zeichen).

Die Urzeichen sind durch keine Definition zu zergliedern.

Die Bedeutung der Urzeichen kann nur aufgewiesen werden.

Die Urzeichen sind diejenigen Zeichen, welche direkt bezeichnen; alle übrigen Zeichen bezeichnen indirekt, durch Vermittlung der Urzeichen.

Die Urzeichen bilden die *Grenze* des Definierens.

Daß es eine solche Grenze gibt, wird dadurch bewiesen, daß es eine Grehze für den Weg der Verifikation gibt. Diese Grenze zeigt sich wieder in den Urzeichen.

Wann *kann* man ein angewandtes Zeichen definieren? Das ist eine Frage der Logik und nicht bloß eine Frage der Zweckmäßigkeit.

Die Definition der Zeichen muß sich nach dem Weg der Verifikation richten. Dieser entscheidet also, wie ein sinnvoll gebrauchtes Zeichen zu definieren ist.

Ein Zeichen kann nur dann definiert werden, wenn die Sätze, in welchen es auftritt, noch

17. Vgl. oben, S. 107. (F. H.)
18. Vgl. oben, S. 215. (F. H.)

Mas não podemos estar errados? Não podemos fingir que estamos falando sobre algo que, em uma inspeção mais próxima, acaba se revelando sem sentido? Não. Porque um enunciado faz sentido se houver um método para sua verificação. E vice-versa: se sabemos verificar uma proposição, a proposição *faz* sentido. Só podemos ficar na obscuridade na medida em que aderirmos à forma linguística externa da proposição.

Analisar uma proposição significa: considerar como a proposição deve ser verificada.

Com as proposições elementares, a linguagem *toca* na realidade.

Especificar as proposições elementares significa: especificar os estados de coisa no mundo.

É claro que os enunciados sobre os corpos (mesas, cadeiras) não são proposições elementares. Afinal, ninguém vai acreditar que chegamos aos últimos elementos da descrição com os corpos.

O que as proposições elementares descrevem são os fenômenos (as experiências).

Posso muito bem dizer: "Este condutor é eletricamente carregado; *porque* o eletroscópio mostra uma deflecção ". Mas não posso dizer:" A mancha no campo visual é amarela; *porque* . . .«.[17] Se não posso mais me referir a outras proposições para verificar uma proposição, então isto é uma indicação de que a proposição é elementar.

A *forma* das proposições elementares não pode ser especificada a priori.

A forma das proposições elementares tem que estar de acordo com a forma dos fenômenos, e não podemos prevê-los.

Portanto, se alguém perguntar: »As proposições elementares terão a forma sujeito-predicado? Ou serão relações de dois dígitos?" Isto mostra que ainda não se entendeu a natureza das proposições elementares.

Nosso princípio deve ser: *não deve haver hipóteses sobre as proposições elementares*.[18]

A forma das proposições elementares só pode ser especificada assim que alguém a possua.

Uma coisa é clara: a estrutura lógica das proposições elementares não precisa ter a menor semelhança com a estrutura lógica das proposições em nossa linguagem ordinária. Lembremo-nos, por exemplo, que podemos descrever o campo visual com um simbolismo matemático que não tem multiplicidade menor do que as equações da física. Aqui vemos que não há mais nenhuma questão de sujeito e predicado, de relação de dois dígitos etc.

Os sinais que ocorrem na proposição elementar são chamados de *sinais originais* (sinais elementares).

Os sinais originais não podem ser discriminados por nenhuma definição.

O significado dos sinais originais só pode ser exibido.

Os sinais originais são aqueles sinais que designam diretamente; todos os outros sinais designam indiretamente, por meio da mediação dos sinais originais.

Os sinais originais constituem o *limite* da definição.

Que exista tal limite é demonstrado pelo fato de que existe um limite para o caminho da verificação. Este limite se mostra novamente nos sinais originais.

Quando se *pode* definir um sinal aplicado? Esta é uma questão da lógica, e não meramente uma questão de conveniência.

A definição dos sinais tem que ser ajustada segundo o caminho da verificação. Portanto, isto decide como um sinal usado de forma significativa deve ser definido.

Um sinal só pode ser definido se as proposições em que ocorre ainda não podem ser verifica-

17. Cf. acima, p. 108 (N. E.)
18. Cf. acima, p. 216 (N. E.)

nicht unmittelbar zu verifizieren sind; wenn wir also noch nicht am Ende der Verifikation angelangt sind. Wenn man so tut, als ob *jedes* Zeichen definierbar sei, als ob es also sozusagen nur auf unsere Geschicklichkeit im Erfinden von Definitionen ankomme, so ist man auf einem ganz falschen Weg.

Wenn man z.B. fragt: »Kann man das Farbwort >gelb< definieren?« so ist darauf zu antworten: Das kommt ganz darauf an, wie eine Aussage über dieses Wort verifiziert werden soll. Verifiziere ich sie durch Hinsehen, so kann ich das Wort »gelb« nicht definieren. Und versuche ich es trotzdem, so hätte ich zwar etwas definiert, aber nur nicht das, was das Wort in *diesem* Zusammenhang bedeutet.

Gesetzt, ich könnte jede Farbe dadurch wiedergeben, daß ich angebe, in welcher Weise sie durch Mischung aus den Farben Rot, Gelb, Blau, Grün, Weiß und Schwarz zu erhalten ist, dann nenne ich solche gleichberechtigte Symbole *Elemente der Darstellung*.[19]

Diese Elemente der Darstellung sind die Urzeichen. Die Urzeichen müssen so beschaffen sein, daß sich mit ihrer Hilfe jeder beliebige Sachverhalt beschreiben läßt.

Ich sehe etwa einen roten Fleck vor mir. Soll ich nun sagen: Rot ist eine Eigenschaft des Fleckes? Oder soll ich lieber sagen: Es ist eine Eigenschaft von Rot, sich an jener Stelle zu befinden? Was ist hier Ding, was Eigenschaft? Diese Frage ist völlig müßig. Die Wahrheit ist, daß unsere hergebrachten Sprachformen (Substantiv, Eigenschaftswort etc.) völlig ihre Bedeutung verlieren, sobald wir sie auf die Phänomene selbst anwenden.[20]

Der Sachverhalt - das Phänomen - ist eine Verbindung von Elementen. Aber nichts in dieser Verbindung deutet daraufhin, daß etwas an ihr dinghaft, etwas eigenschafthaft ist.

Hier erhebt sich zunächst die Frage: Was kann denn mit einer solchen Unterscheidung gemeint sein?

Frege meinte, daß das, was die Worte im Satz miteinander verbinde - gewissermaßen das Satzhafte am Satz - das Prädikat sei. Die möglichen Prädikate nannte er *Begriffe*, und er unterschied so zwischen Begriff und Gegenstand.[21]

Man könnte nun meinen, daß wir bei der Beschreibung der Phänomene auf einen anologen Unterschied stoßen müßten, d. h. daß es etwas am Sachverhalt gäbe, das das Formhafte an ihm ist, das die übrigen Elemente miteinander verbindet, und etwas, das dinghaft ist, das verbunden wird. Durch das Prädikat würde dann das Formhafte am Sachverhalt bezeichnet werden, durch die übrigen Satzteile das Dinghafte.

Diese ganze Unterscheidung entsteht also, sobald man fragt: Was verbindet die Elemente der Sachlage miteinander? Aber dürfen wir denn überhaupt so fragen? Die Elemente werden nicht *durch etwas* miteinander verbunden. Sie hängen schon zusammen, und diese Verkettung ist eben der Sachverhalt.

Und wird denn durch jene Vorstellung etwas erklärt? Wenn es erst eines Kittes bedarf, der die Elemente zusammenhält - was verbindet denn den Kitt mit den Elementen?[22]

Die Form ist die Möglichkeit der Struktur, und diese kommt unmittelbar durch die Verbindung der Elemente zustande.

---

19. Vgl. oben, S. 15. (F. H.)
20. Dies ist eine sehr klare Bewegung, in dem Wittgenstein eine These logischer Natur der gewöhnlichen Sprache überlagert, die verwendet wird, um dieselbe These aufzustellen und zu konstituieren. (N. U.)
21. Keiner dieser Ausdrücke kommt Wort für Wort in Freges Schriften vor; vgl. aber, z.B., »über Begriff und Gegenstand«, *Funktion, Begriff, Bedeutung*,[2] Göttingen, 1966, S. 67f. (F. H.)
22. Ein Argument von F. H. Bradley (*Appearance and Reality*,[2] London, 1897, p. 33) benützt, auf den in der früheren Fassung der Thesen an dieser Stelle hingewiesen wird. (F. H.)

das imediatamente; se ainda não chegamos ao final da verificação. Se alguém finge que *todo* sinal é definível, como se, por assim dizer, só dependesse de nossa habilidade em inventar definições, então estaremos num caminho completamente errado.

Por exemplo, se alguém se pergunta: “Pode-se definir a palavra para a cor ‘amarela’?” A resposta é: isto depende inteiramente de como um enunciado sobre esta palavra deve ser verificado. Se eu verificar pelo olhar, não posso definir a palavra “amarelo”. E se eu tentar de qualquer maneira, eu teria definido algo, mas não apenas o que a palavra significa *neste* contexto.

Supondo que eu pudesse reproduzir todas as cores especificando a forma como elas podem ser obtidas misturando-se as cores vermelho, amarelo, azul, verde, branco e preto, então chamaria estes símbolos com direitos iguais de *elementos de apresentação*.[19]

Estes elementos de apresentação são os sinais originais. Os sinais originais devem ser tais que possam ser usados para descrever qualquer estado de coisas.

Eu vejo uma mancha vermelha na minha frente. Devo dizer agora: o vermelho é uma propriedade da mancha? Ou deveria antes dizer: é uma propriedade do vermelho estar naquele lugar? O que é aqui uma coisa, o que é uma propriedade? Esta pergunta é completamente inútil. A verdade é que nossas formas tradicionais de linguagem (substantivo, adjetivo etc.) perdem completamente seu significado assim que as aplicamos aos próprios fenômenos.[20]

O estado de coisas - o fenômeno - é uma combinação de elementos. Mas nada nesta conexão indica que algo sobre isto é semelhante a algo, que algo seja semelhante a uma propriedade.

A primeira questão que se coloca aqui é: o que pode ser entendido por tal distinção?

Frege acreditava que o que conecta as palavras em uma proposição - até certo ponto o que é semelhante a uma proposição na proposição - é o predicado. Ele chamou os possíveis predicados de *conceitos* e, assim, fez uma distinção entre conceito e objeto.[21]

Pode-se pensar que, ao descrever os fenômenos, teríamos que encontrar uma diferença analógica; isto é, que há algo no estado de coisas que é semelhante a uma forma, que conecta os outros elementos uns com os outros, e algo que é semelhante a uma coisa que os conecta. Mediante o predicado seria designado então o aspecto formal do estado de coisas, e mediante as partes restantes da proposição, os aspectos da coisa.

Portanto, toda esta distinção surge assim que se pergunta: o que conecta os elementos do estado de coisas uns com os outros? Mas podemos, afinal, perguntar deste modo? Os elementos não estão conectados uns com os outros *mediante alguma coisa*. Eles já estão conectados, e este encadeamento é precisamente o estado de coisas.

E aquela ideia explica alguma coisa? Quando uma massa é necessária para manter os elementos unidos - o que conecta a massa aos elementos?[22]

A forma é a possibilidade da estrutura, e isto se dá diretamente pela conexão dos elementos.

Agora não se pode mais perguntar: os sinais originais significam algo com aspecto de coisa? Ou apresentam propriedades ou relações? E isto só mostra que as categorias da linguagem ordinária são insuficientes para descrever os fenômenos.[23]

---

19. Cf. acima, p. 16 (N. E.)
20. Este aqui é um movimento bastante claro em que Wittgenstein sobrepõe uma tese de natureza lógica à própria linguagem ordinária utilizada para erguer e constituir esta mesma tese. (N. T.)
21. Nenhuma destas expressões aparece palavra por palavra nos escritos de Frege; mas confira, por exemplo, “Sobre Conceito e Objeto”, in *Funktion, Begriff, Bedeutung*,[2] Göttingen, 1966, p. 67s. (N. E.)
22. Um argumento utilizado por F. H. Bradley (*Appearance and Reality*,[2] London, 1897, p. 33), referido numa versão prévia das *Teses* neste mesmo ponto (N. E.)
23. Aqui cabe a mesma crítica que está na nota 19, acima: como é que Wittgenstein sabe que a linguagem ordinária é

Jetzt kann man nicht mehr fragen: Bedeuten die Urzeichen etwas Dinghaftes? Oder stellen sie Eigenschaften oder Relationen dar? Und das zeigt nur, daß die Kategorien der Umgangssprache nicht hinreichen, um die Phänomene zu beschreiben.[23]

Die Elemente sind einfach. Sie können daher nicht beschrieben werden.

Was kann man beschreiben? Das, was komplex ist. Die Beschreibung des Komplexes wird darin bestehen, daß man angibt, in welcher Weise sich seine Bestandteile zueinander verhalten. Sind die Bestandteile wieder komplex, so kann man sie in derselben Weise beschreiben u. s.f.

Hier erhebt sich die Frage: Kann dieser Prozeß beliebig weit fortgesetzt werden?

Nehmen wir an, das wäre möglich. Es würde also jedes Zeichen, das in einem Satz p auftritt, einen Komplex bezeichnen, und dieser Komplex ließe sich wieder durch einen andern Satz q beschreiben. Kann ich dann jemals sicher sein, ob ein Zeichen, mit dem ich beschreibe, Bedeutung hat? Nein. Ich müßte ja jedesmal nachsehen, ob jener Komplex *besteht*, d. h. ob der Satz q wahr ist. Ob ein Zeichen Bedeutung hat, würde also von der Erfahrung abhängen. Dann aber wäre überhaupt keine Beschreibung möglich.

Jede Beschreibung setzt voraus, daß es etwas Festes in der Welt gibt, etwas, das unabhängig von dem Bestehen oder Nichtbestehen der Sachverhalte ist. Dieses Feste sind eben die Elemente.

Daß es einfache Elemente gibt, ist nicht etwa das Ergebnis einer abstrakten Theorie, sondern wir müssen es im Grunde alle wissen. Und das stimmt ja auch mit unserem natürlichen Gefühl überein. Ich kann den Tisch beschreiben, indem ich angebe, welche Farbe er hat. Aber die Farben Rot, Gelb etc. kann ich nicht wieder beschreiben. Kann sich meine Kenntnis der Farben im Lauf der Erfahrung ändern? Hat es einen Sinn zu sagen: »Je öfter ich die Farbe Rot gesehen habe, desto mehr Eigenschaften kenne ich an ihr«? Es ist klar, daß es hier eine Art Vollständigkeit unseres Wissens gibt. Und das bedeutet: In bezug auf die Elemente haben wir nichts mehr zu lernen.

(Wir lernen zwar auch die Farben durch Erfahrung kennen. Aber dies ist nicht die Erfahrung eines Sachverhaltes.)

Es gibt eine und nur eine vollständige Analyse des Satzes.

Die Analyse des Satzes macht die Art offenbar, in der der Satz mit der Wirklichkeit zusammenhängt.

Dieser Zusammenhang wird eben durch die Urzeichen vermittelt.

Nur wenn es möglich ist, den Satz bis in die Urzeichen zu zergliedern, ist er mit der Wirklichkeit verknüpft; nur dann hat er Sinn.

Läßt sich die Bedeutung eines Zeichens nicht aufweisen und läßt es sich auch nicht durch Definition auf andere Zeichen zurückführen, so ist der Weg zur Verifikation versperrt.

Die Gesamtheit der Urzeichen *begrenzt* die Sprache.

8. Gegenstand

23. Hier passt die gleiche Kritik wie in Anmerkung 19 oben: Woher weiß Wittgenstein, dass gewöhnliche Sprache nicht hinreicht, um Phänomene zu beschreiben, wenn nicht durch *gewöhnliche Sprache*? Der Punkt ist, dass der Wittgensteinsche Pragmatismus bis 1929 die Praxis, das menschliche Handeln, als ein logisch beschreibbares Phänomen verstand und damit der Logik ein epistemisches Privileg einräumte statt der Praxis, in der wir beispielsweise Logik machen und einfach von komplex unterscheiden. (A. U.)

Os elementos são simples. Portanto, eles não podem ser descritos.

O que se pode descrever? Aquilo que é complexo. A descrição do complexo consistirá em expor a forma como seus componentes se relacionam. Se os componentes forem novamente complexos, eles podem ser descritos da mesma maneira, e assim por diante.

Aqui surge a pergunta: este processo pode ser continuado indefinidamente?

Vamos supor que isto seja possível. Portanto, todo sinal que ocorre numa proposição p designaria um complexo, e este complexo poderia ser descrito novamente por outra proposição q. Posso então ter certeza se um sinal que uso para descrever tem significado? Não. Eu teria que verificar todas as vezes se este complexo *existe*, isto é, se a proposição q é verdadeira. Portanto, se um sinal tem significado dependeria portanto da experiência. Mas então nenhuma descrição seria possível.

Toda descrição pressupõe que haja algo fixo no mundo, algo que independe da existência ou não dos estados de coisas. Este fixo são precisamente os elementos.

O fato de que existam elementos simples não é o resultado de uma teoria abstrata, senão que temos que saber basicamente tudo isto. E isto também está de acordo com nosso sentimento natural. Posso descrever a tabela indicando a cor que ela tem. Mas não posso descrever as cores vermelho, amarelo etc. novamente. O meu conhecimento das cores pode mudar ao longo da experiência? Faz sentido dizer: “Quanto mais vezes vejo a cor vermelha, mais propriedades conheço sobre ela”? É claro que existe uma espécie de completude de nosso conhecimento aqui. E isto significa: em relação aos elementos, não temos mais nada a aprender.

(Também conhecemos as cores por meio da experiência. Mas esta não é a experiência de um estado de coisas.)

Existe uma e apenas uma análise completa da proposição.

A análise da proposição revela o modo como a proposição se relaciona com a realidade.

Esta conexão é transmitida por meio dos sinais originais.

Somente quando é possível decompor a proposição em seus sinais originais é que ela se conecta com a realidade; só então ela faz sentido.

Se o significado de um sinal não pode ser demonstrado e não pode ser rastreado até outros sinais por definição, o caminho para a verificação está bloqueado.

A totalidade dos sinais originais *limita* a linguagem.

8. Objetos

insuficiente para descrever os fenômenos se não pela *linguagem ordinária*? O ponto é que o pragmatismo wittgensteiniano até 1929 compreendia a práxis, a atividade humana, como fenômeno logicamente descritível, outorgando, assim, o privilégio epistêmico à lógica em vez da própria práxis na qual fazemos lógica e distinguimos simples de complexos, por exemplo. (N. T.)

Die Elementarsätze beschreiben den Inhalt unserer Erfahrung. Alle anderen Sätze sind nur eine Entwicklung dieses Inhalts.

Hier erhebt sich die Frage: Wie kommen wir von den Elementarsätzen zu den Sätzen unserer gewöhnlichen Sprache?

Unsere gewöhnliche Sprache hat den Zweck, die Vorgänge der Umwelt zu beschreiben. Sie hat nicht den Zweck, die logische Struktur der Phänomene wiederzugeben. Sie beschreibt aber die Vorgänge der Umwelt, indem sie von Gegenständen (Dingen, Körpern) spricht, diesen Eigenschaften beilegt oder sie in Beziehungen setzt u.s.f.

Wir müssen nun fragen: Welches ist der Symbolismus, der einen Gegenstand darstellt?

Russell meinte, ein Gegenstand - z. B. der Tisch - sei die Klasse seiner Aspekte.[24]

Eine Klasse von Aspekten kann zweierlei bedeuten:

1. Eine Anzahl von Aspekten, die durch eine Liste aufgezählt sind. Das meinen wir offenbar nicht, wenn wir von einem Tisch sprechen.

2. Eine Eigenschaft von Aspekten, also ein gemeinsamer Zug, der in Aspekten vorkommen kann (z.B. eine Farbe). Es ist klar, daß wir auch das nicht meinen.

Daß der Symbolismus, der den Tisch darstellt, von ganz anderer Natur sein muß als derjenige der Aussagefunktionen, verrät sich schon in der gewöhnlichen Sprache. Diese behandelt ja die Gegenstandsworte in ganz anderer Weise als die Eigenschafts- und Beziehungsworte. Die Worte »weiß«, »größer als« , »zwischen« erzwingen eine ganz bestimmte Satzform. Deshalb können wir ihre logischen Formen durch die Symbole fx, xRy, P (x, y, z) nachbilden.

Ein Substantiv fordert dagegen keine bestimmte Satzform: Es hat alle Formen, die ihm die Sprache gibt. Diese Verschiedenheit muß einen Grund haben und die richtige Auffassung des Gegenstandes muß diesen Grund klar machen.

In Wahrheit hängt der Begriff des Gegenstandes mit der *Induktion* zusammen.

Die Induktion tritt in der Form einer Hypothese auf.

Unter einer *Hypothese* verstehen wir hier nicht eine Aussage, sondern ein Gesetz zur Bildung von Aussagen.[25]

Wahr oder falsch können nur die einzelnen Aussagen sein, nicht die Hypothese.

Die Hypothese ist nie verifiziert. Sie weist immer in die Zukunft.

Ihre Rechtfertigung liegt in ihrer Leistung, d. h. in der Vereinfachung, zu der sie führt.

Auch wenn die Aussagen, zu welchen sie führt, falsch sind, ist sie nicht widerlegt. Wir können sie aufrecht erhalten, indem wir eine neue Hypothese einführen. Bedarf eine Hypothese immer neuer Hilfshypothesen, so wird sie unzweckmäßig und wir geben sie auf.

Einfach, plausibel, wahrscheinlich -, das sind in bezug auf eine Hypothese drei gleichbedeutende Worte.[26]

Es gibt Hypothesen von der mathematischen Form. Solche Hypothesen sind die physikalischen Gesetze.

Wenn ich z. B. das Verhalten eines Gases bei verschiedenem Druck und konstanter Temperatur beschreibe, so kann ich diese Beobachtungen verbinden durch das Gesetz »p · v = const.«. Auf Grund dieses Gesetzes kann ich beliebig viele Paare von Zahlwerten p, v konstruieren, und jedem solchen Zahlenpaar entspricht eine Beschreibung. Die Gleichung ist eine Methode, um beliebig viele solcher Beschreibungen zu bilden.

Das Naturgesetz faßt nicht etwa nur die Beobachtungen zusammen, die bisher gemacht wor-

24. Vgl. z.B. *Our Knowledge of the External World*, Chicago u. London, 1914, s. 89 ff. (F. H.)
25. Vgl. oben, S. 109. (F. H.)
26. Vgl. oben, S. 111, und *PhB* S. 282. (F. H.)

As proposições elementares descrevem o conteúdo de nossa experiência. Todas as outras proposições são apenas um desenvolvimento deste conteúdo.

Aqui surge a pergunta: como vamos das proposições elementares para as proposições da nossa linguagem comum?

Nossa linguagem comum tem o propósito de descrever os processos do nosso ambiente. Seu objetivo não é reproduzir a estrutura lógica dos fenômenos. Mas descreve os processos do ambiente falando de objetos (coisas, corpos), atribuindo propriedades a eles ou relacionando-os etc.

Temos que nos perguntar agora: qual é o simbolismo que se apresenta um objeto?

Russell pensou que um objeto - por exemplo, a mesa - fosse a classe de seus aspectos.[24]

Uma classe de aspectos pode significar duas coisas:

1. Uma quantidade de aspectos que são enumerados por uma lista. Obviamente, não é isto que queremos dizer quando falamos de uma mesa.

2. Uma propriedade de aspectos, ou seja, uma característica comum que pode ocorrer em aspectos (por exemplo, uma cor). É claro que também não queremos dizer isto.

Que o simbolismo que apresenta a mesa deve ser de natureza completamente diferente daquele das funções proposicionais já se revela na linguagem comum. Esta trata os substantivos de uma maneira completamente diferente do que os adjetivos e as palavras relacionais. As palavras "saber", "maior que", "entre" obrigam a uma forma proposicional muito determinada. Portanto, podemos reproduzir suas formas lógicas com os símbolos fx, xRy, P (x, y, z).

Um substantivo, por outro lado, não requer uma forma proposicional determinada: ele tem todas as formas que a linguagem lhe dá. Tem que haver uma razão para esta diferença, e a concepção correta dos objetos tem que deixar esta razão clara.

Na verdade, o conceito de objeto está relacionado à *indução*.

A indução ocorre na forma de uma hipótese.

Por *hipótese* não compreendemos aqui um enunciado, mas uma lei para a formação de enunciados.[25]

Apenas os enunciados individuais podem ser verdadeiros ou falsos, não a hipótese.

A hipótese nunca é verificada. Ela sempre aponta para o futuro.

Sua justificativa está no seu desempenho; isto é, na simplificação a que leva.

Mesmo que os enunciados que a conduzem estejam errados, ela não é refutada. Podemos mantê-la introduzindo uma nova hipótese. Se uma hipótese sempre precisar de novas hipóteses auxiliares, ela se torna inadequada e desistimos dela.

Simples, plausível, provável - estas são três palavras sinônimas em relação a uma hipótese.[26]

Existem hipóteses da forma matemática. Estas hipóteses são as leis da física.

Se descrevo, por exemplo, o comportamento de um gás a diferentes pressões e temperaturas constantes, posso combinar estas observações pela lei "p · v = const." Com base nesta lei, posso construir qualquer número de pares de valores numéricos p, v, e cada par de números corresponderia a uma descrição. A equação é um método para formar qualquer número destas descrições.

A lei da natureza não resume apenas as observações feitas até agora. Se alguém quisesse dizer: resume um número infinito de observações, ou seja, tudo o que alguém já fez ou fará - isto não expressa nada, uma vez que esta proposição nunca pode ser verificada.

24. Cf., por exemplo, Our Knowledge of the External World, Chicago &. London, 1914, pp. 89ss. (N. E.)
25. Cf. acima, p. 110. (N. E.)
26. Cf. acima, p. 112, e PR, p. 282 (N. E.)

den sind. Wenn man sagen wollte: Es faßt unendlich viele Beobachtungen zusammen, nämlich alle, die man jemals gemacht hat oder die man jemals machen wird - so drückt das gar nichts aus, da dieser Satz nie verifiziert werden kann.

Das Naturgesetz ist nicht mit dem *Sinn* der einzelnen Beschreibungen gebildet - es ist also nicht eine Wahrheitsfunktion dieser Sätze - sondern es ist ein mathematisches Gesetz, das die Zahlen verbindet, die in diesen Beschreibungen auftreten. (Daher ist die generelle Implikation nicht der Ausdruck des Naturgesetzes.)

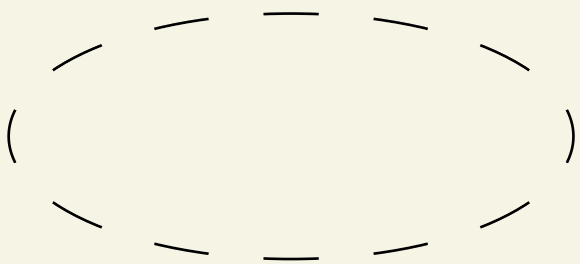
Die Physik konstruiert ein System von Hypothesen, dargestellt durch ein System von Gleichungen.

Der Begriff des Gegenstand es involviert eine Hypothese. Wir machen nämlich die Hypothese, daß die einzelnen Aspekte, die wir wahrnehmen, in gesetzmäßiger Weise zusammenhängen.

Wenn ich sage: »Alle die verschiedenen Bilder, die ich sehe, gehören zu einem Gegenstand, sagen wir zu einem Tisch«, so heißt das: Ich verbinde die gesehenen Bilder durch ein hypothetisch angenommenes Gesetz. Auf Grund dieses Gesetzes kann ich aus gegebenen Bildern neue Bilder ableiten.

Wollte ich die einzelnen Aspekte beschreiben, so wäre das ungeheuer kompliziert. Die Formung, die unsere gewöhnliche Sprache vollbringt, besteht nun darin, daß sie all diese zahllosen Aspekte in einen hypothetisch angenomm enen Zusammenhang bringt .

Die Vereinfachung ist von derselben Art, wie wenn ich angesichts der folg enden Figur sage: Ich sehe die Teile einer Ellipse.



Die Sprache des täglichen Lebens verwendet ein System von Hypothesen. Sie bedient sich dabei der Substantiva.

Die Aspekte hängen räumlich und zeitlich zusammen.

Der Gegenstand ist die Art und Weise, wie die Aspekte zusammenhängen.

Der Gegenstand ist der Zusammenhang der Aspekte, dargestellt durch eine Hypothese.

Ein Bild zur Verdeutlichung: Der Gegenstand gleicht einem Körper im Raum: die einzelnen Aspekte sind die Schnitte, die wir durch ihn legen.[27]

Was wir beobachten, sind immer nur die einzelnen Schnitte durch das zusammenhängende Gebilde, das das Gesetz darstellt.

Kenne ich einige Schnitte, so kann ich diese durch eine Hypothese verbinden. Und ebenso kann ich einige Aspekte durch eine Hypothese verbinden. Dieses Verbindende stellt eben den Gegenstand dar. Die Rechtfertigung der Hypothese liegt in ihrer Bewährung, nämlich darin, daß ich mit ihrer Hilfe das Eintreten neuer Aspekte vorhersagen kann.

Hier erledigt sich auch die Streitfrage, ob der Gegenstand nur aus den wahrgenommenen oder aus den möglichen Aspekten »besteht«. Der Gegenstand besteht nämlich gar nicht aus

27. Vgl. oben, S. 1 11, und PhB S. 282. (F. H.)

A lei da natureza não é formada com o *sentido* das descrições individuais - portanto, não é uma função de verdade destas proposições - mas é uma lei matemática que conecta os números que aparecem nestas descrições. (Conseqüentemente, a implicação geral não é a expressão da lei da natureza.)

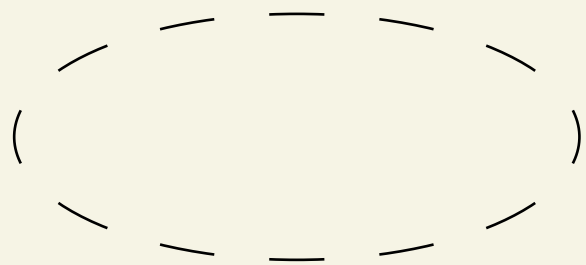
A física constrói um sistema de hipóteses apresentado por um sistema de equações.

O conceito de objeto envolve uma hipótese. Fazemos a hipótese de que os aspectos individuais que percebemos estão conectados de maneira regular.

Quando digo: “Todas as diferentes imagens que vejo pertencem a um objeto, digamos a uma mesa”, isto significa: conecto as imagens que vejo por uma lei hipoteticamente assumida. Com base nesta lei, posso derivar novas imagens de imagens dadas.

Se eu quisesse descrever os aspectos individuais, seria extremamente complicado. A formação que efetiva a nossa linguagem comum consiste em colocar todos esses inúmeros aspectos em um contexto hipoteticamente assumido.

A simplificação é do mesmo tipo de quando digo em face da seguinte figura: vejo as partes de uma elipse.



A linguagem da vida cotidiana usa um sistema de hipóteses. Ela se serve de substantivos.

Os aspectos estão conectados espacial e temporalmente.

O objeto é a maneira como os aspectos se conectam.

O objeto é a conexão entre os aspectos apresentada por uma hipótese.

Uma imagem para esclarecimento: o objeto se assemelha a um corpo no espaço: os aspectos individuais são os cortes que fazemos através dele.[27]

O que observamos são sempre apenas os cortes individuais através da estrutura coerente que a lei apresenta.

Se conheço alguns cortes, posso associá-los a uma hipótese. E também posso conectar alguns aspectos por meio de uma hipótese. Este elemento de ligação apresenta o objeto. A justificação da hipótese reside na sua comprovação, nomeadamente no fato de com a sua ajuda poder prever a ocorrência de novos aspectos.

É aqui que se resolve a polêmica questão de se o objeto “consiste” apenas no percebido ou nos aspectos possíveis. O objeto não consiste em aspectos, senão que estamos apenas usando um método por meio do qual derivamos enunciados sobre aspectos.

Russell não reproduziu corretamente a natureza lógica do objeto quando o concebeu como uma *classe*. Porque uma classe de aspectos não nos ajuda em nada a obter qualquer enunciado sobre outro aspecto. A classe não tem nada a ver com indução - mas o objeto é essencialmente relacionado à indução.

O mutante, o inconstante são os aspectos individuais; o que é fixo e permanente é a forma

27. Cf. acima, p. 112, e PR, p. 282 (N. E.)

Aspekten, sondern wir gebrauchen hier nur eine Methode, mittels deren wir Aussagen über Aspekte ableiten.

Russell hat die logische Natur des Gegenstandes nicht richtig wiedergegeben, wenn er ihn als *Klasse* auffaßt. Denn eine Klasse von Aspekten hilft uns ja gar nicht, irgendeine Aussage über einen weiteren Aspekt zu gewinnen. Die Klasse hat mit der Induktion nichts zu tun - der Gegenstand aber hängt wesentlich mit der Induktion zusammen.

Das Wechselnde, Unbeständige sind die einzelnen Aspekte; das Feste, Bleibende ist die Form des Zusammenhanges der Aspekte. Dieser feste Zusammenhang wird durch *ein* Wort bezeichnet.

Man hat ja immer gefühlt, daß etwas am Gegenstand fest und beharrend ist und hat das indem Satz ausgedrückt: Der Gegenstand ist der Träger seiner Eigenschaften. Und das ist auch richtig , wenn man unter dem Träger die feste Form des Zusammenhanges der Aspekte versteht.

Daß unsere Beschreibung des Gegenstand es immer unabgeschlossen bleibt, ist kein Zufall. Die Möglichkeit einer solchen Beschreibung muß bereits in der Natur des Gegenstandes - in der Form der Hypothese - enthalten sein .

Hier sehen wir deutlich, daß sich der Gegenstand ganz anders verhält als das Element eines Sachverhaltes. Wir sehen nun auch, wie leicht philosophische Irrtüm er dadurch entstehen, daß man die Kategorie des Gegenstandes - d . h. die logische Form des Substantivs - auf die Elemente überträgt und so in die Versuchung gerät, ein Element ebenso beschreiben zu wollen wie einen Gegenstand.

Alle logischen Formen unserer Umgangssprache - die Subjekt-Prädikat Struktur, die Struktur der Relation - hängen auf das engste mit den Gegenständen zusammen und werden unanwendbar, sobald wir den Versuch machen, die Phänomene selbst zu beschreiben.

Der Satz: »Orange liegt zwischen Gelb und Rot« klingt z.B. ebenso wie der Satz: »Der Tisch steht zwischen d m Stuhl und dem Fenster« und deshalb entsteht so leicht der Anschein, als ob ein solcher Satz die Farben beschreibe. Hier führt uns die Verwendung der Substantivform ständig in die Irre .

Dasselbe gilt von den Aussagefunktionen. Das Symbol »fx« ist hergenommen von dem Fall, daß »f« ein Prädikat und »x« ein variables Substantiv bezeichnet. Bei dem Vordringen zu den Elementarsätzen verlieren die Aussagefunktionen (Klassen) jeden Wert.

Die Hypothese des Gegenstandes verbindet Tatsachen *verschiedener Art* miteinander.

Bei dem Wort »Tisch« denken wir ja nicht nur an den Zusammenhang zwischen den vers chiedenen Gesichtsbildern, sondern auch an den Zusammenhang zwischen diesen und den Tastempfindungen etc. Der Gegenstand ist das, was alle diese Tatsachen verbindet.

Die Hypothese ist auf *mehr* berechnet als auf die Wiedergabe *einer* Art von Erfahrung. Wenn wir eine bestimmte Erfahrung machen (etwa das Gesichtsbildeines Tisches sehen), so erwarten wir auf Grund der Hypothese, auch ganz bestimmte Erfahrungen anderer Art (Tastempfindungen) machen zu können.

Die Hypothese enthält gleichsam leerlaufende Räder:[28] Solange keine weiteren Erfahrungen auftreten, bleiben sie unbenützt, und sie treten erst in Aktion , sobald es gilt, weitere Erfahrungen darzustellen .

Das erklärt auch, wie es kommt, daß wir denselben Satz scheinbar auf verschiedene Art verifizieren können.

Ich sage etwa: »Da liegt eine Uhr«. Wenn man mich nun fragt, woher ich das weiß, so könnte

28. Zu „leerlaufend Rädern" vgl. oben S.21 ff und Anmerkung 15 auf S. 20. (A.U.)

pela qual os aspectos estão conectados. Esta conexão fixa é denotada por *uma* palavra.

Sempre se sentiu que algo é fixo e persistente no objeto e isto se expressa na proposição: o objeto é o portador das suas propriedades. E isto também é correto se se entende pelo portador a forma fixa da conexão dos aspectos.

Não é por acaso que nossa descrição do objeto sempre permanece incompleta. A possibilidade de tal descrição já deve estar contida na natureza do objeto - na forma da hipótese.

Aqui vemos claramente que o objeto se comporta de maneira muito diferente do elemento de um estado de coisas. Agora também vemos quão facilmente erros filosóficos podem surgir do fato de que a categoria do objeto - isto é, a forma lógica do substantivo - transfere-se para os elementos e, portanto, é tentada a querer descrever um elemento da mesma forma como um objeto.

Todas as formas lógicas de nossa linguagem ordinária - a estrutura sujeito-predicado, a estrutura da relação - estão intimamente relacionadas aos objetos e tornam-se inaplicáveis assim que tentamos descrever os próprios fenômenos.

A proposição: "O laranja fica entre o amarelo e o vermelho" soa exatamente como a proposição: "A mesa está entre a cadeira e a janela", e é por isto que é tão fácil ter a impressão de que aquela proposição descreve as cores. Aqui o uso da forma substantiva nos leva constantemente ao erro.

A mesma coisa vale para as funções proposicionais. O símbolo "fx" é obtido do caso em que "f" denota um predicado e "x" um substantivo variável. Com o avanço para as proposições elementares, as funções proposicionais (classes) perdem todo o valor.

A hipótese do objeto conecta fatos de *vários tipos*.

Quando ouvimos a palavra "mesa", pensamos não apenas na conexão entre as várias imagens visuais, mas também na conexão entre estas e as sensações táteis etc. O objeto é aquilo que conecta todos estes fatos.

A hipótese é calculada a *mais* do que a reprodução de *um* tipo de experiência. Quando temos uma determinada experiência (por exemplo, ver a imagem visual de uma mesa), esperamos, com base na hipótese, poder ter experiências muito específicas de um tipo diferente (sensações táteis).

A hipótese contém, por assim dizer, rodas livres:[28] enquanto não ocorrem mais experiências, elas permanecem sem uso e só entram em ação assim que novas experiências têm de ser apresentadas.

Isto também explica como podemos aparentemente verificar a mesma proposição de maneiras diferentes.

Eu digo algo como: "Tem um relógio ali". Se você me perguntar como sei disto, eu poderia responder: "Eu vi" ou: "Estendi a mão e senti" ou "Ouvi o tique-taque". Aqui parece que verifiquei a mesma proposição de três maneiras completamente diferentes.

Mas não é assim. O que verifiquei são diferentes "cortes" pela mesma hipótese. Só não descrevemos o "corte" individual, mas antes apresentamos os fenômenos no contexto de toda a hipótese[29].

Se um tipo de experiência fosse fechado para mim, se fosse, por exemplo, cego de nascença, então a hipótese do objeto também *significaria* de maneira diferente - ou seja, menos - para mim.

Portanto, quando se diz que "a mesma coisa" pode ser verificada de maneiras diferentes, "a

28. Sobre "rodas livres", cf. p. 22ss, acima, e nota 15 da p. 20. (N. T.)
29. Cf. acima, p. 184ss (N. E.)

ich erwidern : »Ich habe sie gesehen« oder: »Ich habe hingegriffen und habe sie gefühlt« oder »Ich habe sie ticken gehört«. Hier scheint es, als ob ich denselben Satz auf drei ganz verschiedene Weisen verifiziert habe.

Aber so ist es nicht. Was ich verifiziert habe, sind verschiedene »Schnitte« durch dieselbe Hypothese. Nur beschreiben wir nicht den einzelnen »Schnitt «, sondern wir stellen die Phänomene gleich im Zusammenhang der gesamten Hypothese dar.[29]

Wäre mir eine Art von Erfahrung verschlossen, wäre ich z. B . von Geburt an blind , dann würde die Hypothese des Gegenstandes für mich auch etwas anderes - nämlich weniger - *bedeuten*.

Wenn man also sagt, daß man »dasselbe« auf verschiedene Art verifizieren kann, so bedeutet »dasselbe« mehr als dasjenige, was nur auf eine Art verifiziert wird .

Das Substantiv kommt nicht nur in einer Satzform vor.

Die logische Form des Substantivs wird daher nicht durch »fx«, » xRy« etc. dargestellt, sondern durch das gesamte komplizierte System der syntaktischen Regeln, die für dieses Wort gelten .

Hier erweist es sich, daß unsere natürliche Sprache der künstlich geschaffenen Symbolik Russells weit überlegen ist. Der Symbolismus der Aussagefunktionen is t sehr nützlich, solange es sich darum handelt, gewisse einfache logische Verhältnisse - etwa das Schließen - darzustellen . Aber er versagt, sobald es sich um die logische Aufklärung der Begriffe handelt, mit welchen wir tatsächlich die Wirklichkeit beschreiben.

Hat die Frage einen Sinn: Wieviel Aspekte muß man gesehen haben, bis die Existenz des Gegenstandes gesichert ist? Nein. Noch so viele Aspekte können die Hypothese nicht beweisen. Ob wir die Hypothese annehmen oder verwerfen - das hängt ausschließlich von der Leistung der Hypothese ab.

Und so verhalten wir uns ja auch in der Tat . Was würde ich z. B. tun, wenn dies Buch, sobald ich es fest anblicke, in nichts zerginge?

Oder wenn ich zwar die Gesichtsbilder, aber nicht die entsprechenden Tastwahrnehmungen hätte? Ich würde s agen: »*Es war kein Buch da*; ich *glaubte* nur eines zu sehen.« Und das heißt: Ich verzichte auf die Hypothese des Buches. Und wenn ich sage: Das Buch ist vorhanden, so heißt das: Ich halte an der Hypothese des Gegenstandes fest.

Hier sieht man, daß es einen guten Sinn hat, von der *Wirklichkeit* der Gegenstände zu sprechen.

Auffallend ist, daß das Prädikat »wirklich« an den Gegenständen haftet und nicht an den Phänomenen, die doch das allein Gegebene sind.

Die Erklärung hierfür liegt darin, daß das Phänomen etwas Einmaliges ist, die im Gegenstand liegende Hypothese aber in die Zukunft weist. Der Gegenstand wirkt auf unsere Erwartung.

Deshalb nennen wir ihn wirklich.

Wer nichts hofft und nichts fürchtet, dem entgleitet die Welt. Sie wird »unwirklich«.

Daß die Erwartungen, die sich an die Hypothese des Gegenstandes knüpfen, in jedem Augenblick in Erfüllung gehen, ist keineswegs selbstverständlich. Dies fühlt der Realist dunkel und äußert dieses Gefühl in der unklaren Form: Die Dinge sind wirklich. Und er hat ja auch recht, wenn unter dem Wort »wirklich« nicht etwas Metaphysisches verstanden wird, sondern die Bewährung der Hypothese.

29. Vgl. oben, S. 183 ff. (F. H.)

mesma coisa" significa mais do que o que é verificado de apenas uma maneira.

O substantivo não ocorre apenas na forma de uma proposição.

A forma lógica do substantivo não é, portanto, apresentada por "fx", "xRy" etc., mas por todo o sistema complexo de regras sintáticas que se valem para esta palavra.

Aqui descobrimos que nossa linguagem natural é muito superior ao simbolismo criado artificialmente por Russell. O simbolismo das funções proposicionais é muito útil, desde que seja uma questão de representar certas relações lógicas simples - como a inferência. Mas falha assim que chega à explicação lógica dos termos com os quais realmente descrevemos a realidade.

Tem a questão algum sentido: quantos aspectos alguém tem que ter visto antes que a existência do objeto seja assegurada? Não. Não importa quantos aspectos a hipótese não possa comprovar. Aceitar ou rejeitar a hipótese depende inteiramente do desempenho da hipótese.

E é assim que realmente nos comportamos. O que gostaria de fazer, por exemplo, se este livro, assim que olhar para ele com firmeza, não se dissolver em nada?

Ou se eu tivesse as imagens visuais, mas não as percepções táteis correspondentes? Eu diria: "*Não havia nenhum livro*; só *acreditei* ter visto alguma coisa ". E isto significa: vou renunciar à hipótese do livro. E quando digo: o livro está ali, isto significa: mantenho a hipótese do objeto.

Aqui pode-se ver que faz sentido falar da *realidade* dos objetos.

É surpreendente que o predicado "real" esteja ligado a objetos e não aos fenômenos, que são as únicas coisas dadas.

A explicação para isto está no fato de o fenômeno ser algo único, mas a hipótese no objeto aponta para o futuro. O objeto afeta nossa expectativa.

É por isto que o chamamos de real.

O mundo escapa de qualquer pessoa que nada espera e nada teme. Torna-se "irreal".

Não é de forma alguma evidente que as expectativas associadas à hipótese do objeto serão satisfeitas a cada momento. O realista sente isto vagamente e expressa este sentimento de forma vaga: as coisas são reais. E também tem razão quando a palavra "realmente" não compreende algo metafísico, mas a comprovação da hipótese.

A crença na realidade é a crença na indução.

Der Glaube an die Realität ist der Glaube an die Induktion.

9. Der logische Raum

Das Element ist Form und Inhalt.

Verschiedene Elemente können die Form gemein haben. Sie unterscheiden sich dann nur durch den Inhalt.

Die Elemente derselben Form bilden ein *System*, (z.B. die Farben).

Ersetzt man die Elemente eines Sachverhaltes auf jede mögliche Art durch Elemente von derselben Form, so ergibt sich eine Klasse von Sachverhalten, von welchen jeder einzelne bestehen oder nicht bestehen kann. Die Gesamtheit dieser bestehenden und nicht bestehenden Sachverhalte heißt der *logische Raum*.

Der logische Raum ist die Möglichkeit für das Bestehen und Nichtbestehen von Sachverhalten.

Die Tatsachen liegen im logischen Raum.

In *einem* logischen Raum liegen alle Tatsachen von derselben Form.

Denken wir uns ein weißes Blatt Papier mit einem Netzwerk von Linien bedeckt. Jede Masche des Netzes kann ich beschreiben, indem ich zwei Stellenzahlen angebe. Den Stellenzahlen entsprechen im Sachverhalt die Elemente und den Maschen des Netzes die Sachverhalte selbst. Besteht nun ein Sachverhalt in der Wirklichkeit, so denken wir uns die entsprechende Masche schwarz ausgefüllt. Die Verteilung der schwarzen Flecke auf dem weißen Papier ist dann ein Bild der Wirklichkeit im logischen Raum.

(Dieses Bild würde nur dann stimmen, wenn die Tatsachen unabhängig voneinander wären. Ist das nicht der Fall, so müssen für die Verteilung der Flecke noch irgendwelche Beschränkungen eingeführt werden.)

Die Wirklichkeit ist gleichsam eine Insel in der Möglichkeit.

Woher wissen wir, daß die Farben ein System bilden? Wenn z. B. jemand sein ganzes Leben lang nur Rot gesehen hätte - würde er dann nicht sagen, daß er nur eine Farbe kennt? Darauf ist zu sagen: Wäre alles, was er sieht, rot und könnte er das beschreiben, dann müßte er auch den Satz bilden können: »Das ist nicht rot« und dies setzt bereits die Existenz anderer Farben voraus. Oder er meint damit etwas, das er nicht beschreiben kann, dann kennt er überhaupt nicht eine Farbe in unserem Sinn und dann kann man auch nicht *fragen*, ob Rot ein System von Farben voraussetzt. Wenn also das Wort »rot« eine Bedeutung hat, so setzt es schon ein System von Farben voraus.[30]

Und so verhält es sich mit jedem sinnvoll gebrauchten Zeichen. Kommt das Zeichen »a« in dem Satz »fa« vor, so setzt das schon andere Sätze dieser Art, z. B. den Satz »fb« voraus. Denn wenn es bloß den Sachverhalt fa gäbe, aber nicht den Sachverhalt fb, so wäre die Erwähnung von »a« überflüssig und *überflüssige Zeichen bedeuten nichts*.

Dies zeigt, daß jeder Satz in einem System von Sätzen liegt.

30. Vgl. oben, S. 43 f u. 71. (F. H.)

9. O espaço lógico

O elemento é forma e conteúdo.

Elementos diferentes podem ter a forma em comum. Deste modo, eles diferem apenas em termos de conteúdo.

Os elementos da mesma forma formam um *sistema* (por exemplo, as cores).

Se os elementos de um estado de coisas são substituídos de todas as maneiras possíveis por elementos da mesma forma, resulta uma classe de estados de coisas, cada um dos quais pode ou não existir. A totalidade destes fatos existentes e não existentes é chamada de *espaço lógico*.

O espaço lógico é a possibilidade de existência e não existência de estados de coisas.

Os fatos estão no espaço lógico.

Em *um* espaço lógico, todos os fatos têm a mesma forma.

Imagine uma folha de papel branco coberta por uma rede de linhas. Posso descrever cada malha da rede pela especificação de dois números posicionais. Os números posicionais corresponde nos estados de coisa aos elementos, e as malhas da rede correspondem aos próprios estados de coisa. Se houver um estado de coisas na realidade, então pensamos na malha correspondente como preenchida em preto. A distribuição das manchas pretas no papel branco é, então, uma imagem da realidade no espaço lógico.

(Esta imagem só estaria correta se os fatos fossem independentes uns dos outros. Se não for este o caso, então algumas restrições teriam que ser introduzidas para a distribuição das manchas).

A realidade é como uma ilha dentro das possibilidades.

Como sabemos que as cores formam um sistema? Se, por exemplo, se alguém só tivesse visto vermelho durante toda a sua vida - não diria que conhece apenas uma cor? Então deve ser dito: se tudo o que ele visse fosse vermelho e ele pudesse descrevê-lo, então ele também teria que ser capaz de formar a proposição: “Isto não é vermelho”, e isto pressupõe a existência de outras cores. Ou se ele quer dizer algo que ele não pode descrever, então ele nem sequer conhece uma cor em nosso sentido e então não se pode *perguntar* se o vermelho pressupõe um sistema de cores. Portanto, se a palavra “vermelho” tem um significado, ela já pressupõe um sistema de cores.[30]

E assim é com todos os sinais usados de forma significativa. Se o sinal “a” ocorrer na proposição “fa”, isto já pressupõe outras proposições deste tipo, por exemplo a proposição “fb”. Pois se houvesse apenas o estado de coisas fa, mas não o estado de coisas fb, a menção de “a” seria supérflua e *os sinais supérfluos nada significariam*.

Isto mostra que cada proposição está em um sistema de proposições.

30. cf. acima, p. 44s e 72. (N. E.)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EDMONDS, David (2020). *The Murder of Professor Schlick: The Rise and Fall of the Vienna Circle*. Princeton: Princeton University Press.

ENGELMANN, Paul (1968). *Letters from Ludwig Wittgenstein with a Memoir*. Translated by L. Fortmüller, Edited by B. McGuinness. New York: Horizon Press.

ENGELMANN, Paul & WITTGENSTEIN, Ludwig (2006). *Wittgenstein - Engelmann: Briefe, Begegnungen, Erinnerungen*. Herausgegeben von I. Somavilla unter Mitarbeit von B. McGuinness. Insbruck: Haymon Verlag.

WITTGENSTEIN, Ludwig. (1975). *Philosophical Remarks*. Trad. M. Aue. Chicago: The University of Chicago Press.

______ . (1984). *Wittgenstein und der Wiener Kreis*. Werkausgabe, Band 3. Herausgegeben von B. McGuinness. Berlin: Suhrkamp.

______. (1993). "A Lecture on Ethics'. In: *Philosophical Occasions 1912-1951*. Ed. James Klagge & Alfred Nordmann. Indianapolis: Hackett Publishing, pp. 37-44.

______ . (2000). *Wittgenstein's Nachlass: The Bergen Electronic Edition*. Oxford, Oxford University Press.

______ . (2001). *Tractatus Logico-Philosophicus / Logisch-Philosophische Abhandlung*. 3a. edicao. Tradução de Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Edusp.

______ . (2003). *The Voices of Wittgenstein. The Vienna Circle*. Ed. Gordon Baker. London: Routledge.

______ . (2005). *The Big Typescript (TS 213)*. Trad. C. Luckhardt & M. Aue. Oxford: Basil Blackwell.

______ . (2005). *Philosophical Grammar*. 2nd revised edition. Trad. A. Kenny. Berkeley: The University of California Press.

______ . (2009). *Philosophische Untersuchungen / Philosophical Investigations*. Trad. G. E. M. Anscombe. Revised translation by J. Schulte & P. Hacker. Oxford: Blackwell Publishing.

______ . (2011). *Observações sobre "O Ramo Dourado" de Frazer*. Trad. João José R. L. de Almeida. Porto: Deriva Editores.

ÍNDICE ANALÍTICO